

**Theoretische und experimentelle Untersuchungen zur
thermischen Durchblutungsmessung mit Wärmeleitsonden
an einem kartesischen Konvektionsmodell**

vorgelegt von
Alfred Oberfranz
aus Paulisch

Marburg 1973

Aus dem Physiologischen Institut der Universität Marburg/Lahn
Direktor: Prof. Dr. H. Hensel

Theoretische und experimentelle Untersuchungen zur
thermischen Durchblutungsmessung mit Wärmeleitsonden
an einem kartesischen Konvektionsmodell

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades der gesamten Medizin
des Fachbereichs Humanmedizin
der Philipps-Universität Marburg

vorgelegt von
Alfred Oberfranz
aus Paulisch
Marburg 1973

Angenommen vom Fachbereich Humanmedizin
der Universität Marburg am 27.3.1973
gedruckt mit Genehmigung des Fachbereichs

Dekan: Prof. Dr. med. H. Oepen
Referent: Prof. Dr. rer. nat. L. Priebe
Correferent: Prof. Dr. med. H. Hensel



INHALTSVERZEICHNIS

I. Einleitung

II. Darstellung der Versuchsanordnung

1. Konvektionsmodell
2. Wasserkreislauf
3. Wärmeleitsonden und Temperaturfühler
4. Fluvograph (Wärmeleitmesser) und Thermistorenbrücke

III. Theorie

1. Stationäres Temperaturfeld im Innen- und Außenraum einer Kugelsonde bei isotroper und homogener Konduktion
2. Das stationäre Temperaturfeld bei zusätzlicher schwacher Konvektion im Außenraum der Wärmeleitsonde
3. Stationäres Temperaturprofil in Kugelsonden inhomogener Schichtung
4. Die Durchflutung im kartesischen Konvektionsmodell
5. Wärmeübergang in laminarer Rohrströmung bei variabler Wandtemperatur
6. Konvektive Wärme im kartesisch durchströmten Modellkörper

IV. Vorbereitende Messungen

1. Messungen am Wasserkreislauf
 - a. Schlauchkontrollen
 - b. Temperaturverteilungen
2. Messungen des Temperaturprofils im geheizten Sondenkörper
3. Auswahltests für Gewebesimulator
 - a. Flüssige Stoffe
 - b. Feste Substanzen

V. Eichung und Messungen

VI. Diskussion

VII. Zusammenfassung

VIII. Zusammenstellung der Formelzeichen

IX. Übersicht der Abbildungen

X. Literatur

Lebenslauf und akademische Lehrer

I. Einleitung

Die thermische Durchblutungsbestimmung mit Wärmeleitsonden erfolgt durch die Messung einer stationären Temperaturdifferenz, wobei ein optimaler thermischer Kontakt zwischen der Wärmeleitsonde und dem durchbluteten Gewebe eine wesentliche Voraussetzung darstellt. Diese Temperaturdifferenz kommt zustande, indem in einem von zwei kleinräumigen und benachbarten Sondenkörpern, beide zusammen bilden die Wärmeleitsonde, durch elektrische Heizung eine Übertemperatur von etwa 3°C erzeugt wird. Die Übertemperatur erscheint in voller Höhe als zu messende Temperaturdifferenz zwischen den beiden Sondenkörpern, wenn im einfachsten Falle eine innere und äußere Mitheizung des nicht direkt geheizten Sondenkörpers ausgeschlossen wird.

Die stationäre Temperaturdifferenz hängt davon ab, in welchem Maße von dem geheizten Sondenkörper die emittierte Wärme durch das fließende Blut konvektiv abgeführt wird. Als fluvographische Faustregel, die die Zuordnung von Meß- und Bestimmungsgröße widerspiegelt, gilt daher (Golenhofen, Hensel u. Hildebrandt, 1963):

Große stationäre Temperaturdifferenz - kleine Durchblutung,
kleine stationäre Temperaturdifferenz - große Durchblutung.

Es ist im allgemeinen ungewiß, ob der konvektiv wirksame Blutfluß ausschließlich die Versorgungsdurchblutung darstellt. Größere arterielle und venöse Gefäße, die nahe an der Sonde vorbeiziehen, tragen ebenso zum konvektiven Wärmeabtransport bei wie die das Gewebe versorgenden Kapillaren und die denen unmittelbar vor- und nachgeschalteten kleineren Gefäße (Hensel u. Priebe, 1970). Visuelle Hilfen bei der Positionierung der Wärmeleitsonden sind im allgemeinen nicht ausreichend, die Natur der Gefäßstrukturen in Sondennähe eindeutig festzulegen.

Die thermische Durchblutungsmessung mit Wärmeleitsonden beruht, wie oben angedeutet, auf dem Prinzip, daß die Temperaturdifferenz zwischen zwei Sondenkörpern, von denen einer elektrisch aufgeheizt wird, durch die konvektive Wärmetransportkomponente

des fließenden Blutes in der erwärmten Sondenumgebung verändert wird. Das Maß der Veränderung ist aber nicht nur von der Höhe der Durchblutung, sondern außerdem von der geometrischen Struktur der Gefäßbahnen abhängig.

Im Falle einer vorwiegend kapillaren Durchblutung bleibt die radiale Symmetrie des stationären Temperaturfeldes erhalten, wenn der geheizte Sondenkörper in Näherung als eine Kugel angesehen werden kann. Die an diese Voraussetzung anschließende theoretische Betrachtung beruht auf folgenden Vorstellungen. Das in die Kapillaren einfließende arterielle Blut besitzt eine Temperatur, die von der Sondenheizung nur unwesentlich beeinflusst ist. Im Gegensatz dazu ist die Temperatur der Kapillarwände erhöht, so daß Wärme vom Gewebe in das Blut übergeht. Der Wärmeübergang ist innerhalb bzw. am Ausgang der Kapillarstrecke beendet, was durch Gleichheit von Wand- und Bluttemperatur zum Ausdruck kommt. Es wird ferner angenommen, daß das so erwärmte venöse Blut den sondenenachbarten Gewebebereich ohne Wärmeabgabe verläßt.

Die kapillaren Wärmeübergangsstrecken sind sehr klein und können daher in Näherung als Punktsenken angesehen werden. Da sie außerdem sehr zahlreich vorhanden sind, führt die Vorstellung einer "Verschmierung" der kapillaren Konvektionswirkung zu der mathematischen weiterführenden Annahme, daß Punktsenken den gesamten Raum in der Sondenumgebung lückenlos erfüllen. Das Ergebnis der Rechnung unter Berücksichtigung dieser Voraussetzungen lautet

$$\vartheta_i = \frac{\text{const}_1}{\lambda_G + \text{const}_2 + \text{const}_3 \sqrt{S}},$$

wenn ϑ_i die gemessene Temperaturdifferenz, λ_G die Wärmeleitfähigkeit des undurchbluteten Gewebes und S die spezifische Durchblutung in der Einheit ml/100 g . min bedeuten. Die 3 Konstanten sind von der Geometrie der Kugelsonde, der elektrischen Heizenergie sowie vom Wärmekurzschluß zwischen den beiden Körpern der Wärmeleitsonde abhängig. Diese Einflüsse kommen z.T. kombiniert in den Werten der einzelnen Konstanten zum Ausdruck.

Die gemeinsame Wirkung von Konduktion und Konvektion kann durch eine Wärmetransportzahl λ beschrieben werden. Die Definition dieser Größe beruht auf der Festlegung, daß Konduktion und Konvektion in der Sondenumgebung den gleichen Wert der gemessenen Temperaturdifferenz Δ_i bedingen wie ein fiktives Konduktionsmedium der Wärmeleitzahl λ . Diese Vorstellung in Verbindung mit der kapillaren Punkt-senken führt zu der folgenden Beziehung zwischen spezifischer Durchblutung f und der Wärmetransportzahl λ (Pribe u. Betz, 1969),

$$f = \text{const} (\lambda - \lambda_g)^2$$

In jedem Falle, ohne Rücksicht auf die spezifische Gefäßstruktur in der Sondenumgebung, ist die Wärmetransportzahl durch die folgende Bestimmungsgleichung gegeben, wenn im Sondeninnern ein Temperaturplateau angenommen werden kann,

$$\lambda = K_1 \frac{J_H^2}{\Delta_i} - K_2$$

Hierin bedeutet J_H die Heizstromstärke, während die Sondenkonstanten K_1 und K_2 durch Eichmessungen in einem oder mehreren konduktiv leitenden Medien bekannter Wärmeleitzahl zu ermitteln sind.

Auch in dem Falle, wenn größere Gefäße in der Sondenumgebung vorhanden sind, die nicht zur Versorgung des sondennahen Gewebes beitragen, ist es möglich, eine Beziehung zwischen der Durchblutung und der Temperaturdifferenz aufzustellen. Voraussetzung ist, daß der konvektive Wärmeabtransport isotrop erfolgt, so daß bei Kugelsonden die radiale Symmetrie des stationären Temperaturfeldes erhalten bleibt.

Die theoretisch und experimentelle Untersuchung dieses Falles ist das Ziel der hier vorliegenden Arbeit. In einem Kon-

vektionsmodell, das im folgenden beschrieben wird, ist eine Gefäßverteilung nachgebildet, welche die Wirkung der Konvektion auf das stationäre Temperaturfeld in Näherung zu ermitteln erlaubt und damit die erwünschte Zuordnung der Temperaturdifferenz ϑ_1 als Meßgröße und der spezifischen Durchblutung S als Bestimmungsgröße aufzustellen gestattet.

II. Darstellung der Versuchsanordnung

1. Konvektionsmodell

Das Modell erhebt nicht den Anspruch, eine biologische Realität darzustellen. Die Symmetrie des im Modell erzeugten konvektionsgestörten Temperaturfeldes ist auch nicht in vollem Maße als radial anzusehn. Es liegt vielmehr eine Drehsymmetrie vor, so daß bei einer Drehung um 90 Grad das Temperaturfeld Punkt für Punkt zur Deckung kommt. Die Drehachsen sind dabei die kartesischen Koordinatenachsen, die sich im Zentrum der geheizten Sondenkugel schneiden. Eine isotherme Fläche des Temperaturfeldes ist um so weniger von einer Kugelfläche verschieden, je dichter die linearen Konvektionsstrecken in der Umgebung der geheizten Sondenkugel, dem Zentrum des Temperaturfeldes, verlaufen.

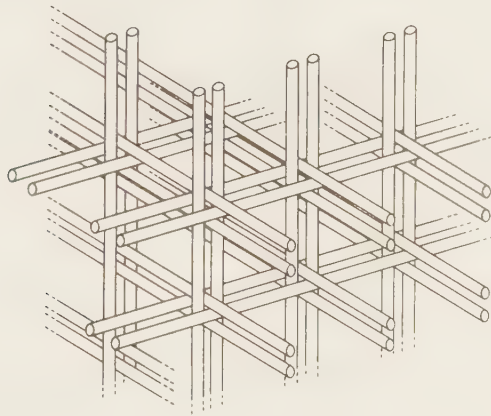


Abb. 1 Geometrische Anordnung der kartesisch aufgespannten Plexiglasrohre im Innern des Kubus.

In einem Kubus von 45 cm Kantenlänge, der aus 0,8 cm dicken Plexiglasplatten gebildet ist, sind die drei kartesischen Koordinatenachsen x , y , z durch die Kubuskanten bestimmt. In jeder Richtung durchziehen in paarweise äquidistanten Abständen 200 Plexiglasrohre des lichten Durchmessers 3 mm ($2R_1$) und der Wandstärke 1 mm ($R_a - R_1$) den Würfel. Je zwei Rohre sind zu einem Paar zusammengefaßt, die von der gleichen Flüssigkeitsmenge pro Zeiteinheit durchflossen werden, wobei die Flußrichtungen gegensinnig sind. In Abbildung 1 ist in einer perspektivischen Darstellung gezeigt, wie die sechs in einem Knotenpunkt sich treffenden Plexiglasrohre angeordnet sind. Eine genauere Darstellung der Rohrsituation in einem Knotenpunkt liefert die Abbildung 2.

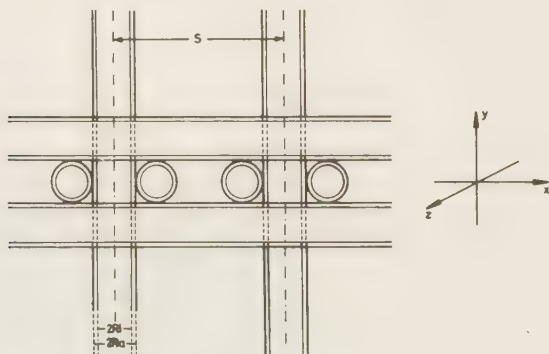


Abb. 2 2 Knotenpunkte mit je 3 Rohrpaaaren, von denen je zwei in x -, y - und z -Richtung verlaufen.

$R_a = 2,5$ mm, $R_1 = 1,5$ mm, $s = 40$ mm (s. Text).

In einem Knotenpunkt sind die sechs Rohre so angeordnet (Abb. 2), daß bei einer Wanddicke von 1 mm ($R_a - R_1$) der Mittelachsenabstand eines Rohrpaares 10 mm ist. Diese besondere Art der Rohrversetzung in einem Knotenpunkt ist vorteilhaft, da

mit dieser Anordnung alle Knotenpunkte im Kubus gleichartig gestaltet werden können, wenn man eine Drehsymmetrie des konvektionsgestörten Temperaturfeldes in der oben angegebenen Art erzielen will. Bei jeder anderen Knotenpunktanordnung der sechs Rohre müßte für diese eine spiegelbildliche Symmetrie zu den Ebenen $x = y = z = 0$ zusätzlich gefordert werden.

Bei der theoretischen Bestimmung der Wärmeübergänge zwischen Rohr bzw. fließender Flüssigkeit und dem im Kubus ruhenden Material wird die Näherung eingeführt, daß als gemeinsame Rohrachse (Repräsentationsachse) eines Paares die im gleichen Abstand zwischen den beiden Rohrachsen befindliche und zu diesen parallele Linie zu gelten hat. Der gegenseitige Abstand der Repräsentationsachsen ist $s = 40$ mm (Abb. 2).

Das in den Plexiglaskubus eingefüllte und ruhende Medium stellt das konduktiv leitende Gewebematerial dar. Damit alle 600 Rohre im Innern des Kubus konvektiv wirksam werden können, ist es erforderlich, daß bis zu den äußersten Rohrpaaren ein Temperaturgefälle zwischen ruhendem und fließendem Medium existiert. Das bedingt aber eine beträchtliche elektrische Heizung im zentral gelegenen Sondenkörper und damit eine relativ hohe Temperatur in Soddennachbarschaft. Die Folge ist die Entstehung einer freien Konvektion und damit eine Störung der quasiradialen Temperatursymmetrie, wenn als Gewebesimulator eine Flüssigkeit verwendet wird. Versuche ergeben, daß - wie später gezeigt wird - mit dem Einsatz flüssiger Materialien trotz sehr hoher Viskositäten und relativ niedriger thermischer Ausdehnungskoeffizienten stets eine beträchtliche Asymmetrie des Temperaturfeldes verbunden ist. Daher ist bei den letzten Versuchen mit festem Material (Sand) experimentiert worden. Füllung und Entleerung des Kubus gestalten sich dabei etwas schwierig, sind jedoch mit einigen Kunstgriffen zu bewältigen.

In der Abbildung 3 ist das kartesische Konvektionsmodell mit den zu- und abführenden Schlauchleitungen zu erkennen. Zur besseren Übersicht sind die drei Wasserflüsse in den einzelnen Koordinatenrichtungen in der photographischen Darstellung

verschiedenfarbig. Im Flußbetrieb ist eine differente Farbgebung wegen der Durchmischung der drei Flüsse im Mischgefäß (s. Wasserkreislauf) nicht möglich.

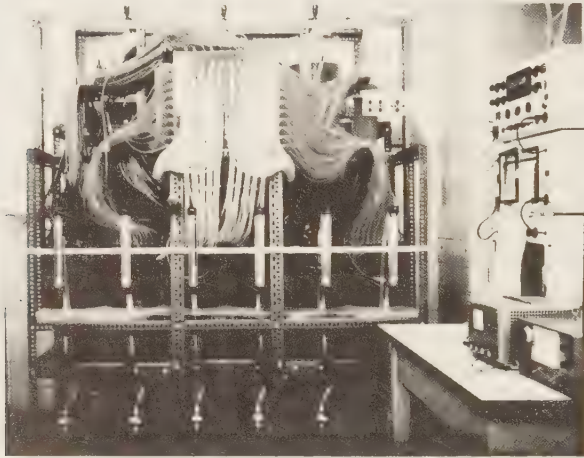


Abb. 3 Das Konvektionsmodell. Die Kennzeichnung der Flüssigkeitsinhalte in den drei Vorratsgefäßen sowie in den 3×200 Rohrleitungen durch verschiedene Farben ist nur möglich, wenn die Flüssigkeit nicht fließt. Am rechten Bildrand der Fluvograph.

2. Wasserkreislauf

Das Strömungsmodell besteht aus parallel und hintereinander geschalteten Einheiten. Die wesentlichen Teile des Kreislaufes sind in Abbildung 4 dargestellt. In Strömungsrichtung aufgezählt sind es: 2 Druck-Saug-Pumpen, Druckseite (Thermostaten Th_1 und Th_2); 3 Vorratsgefäße (VG_1 , VG_2 , VG_3); 600 Rohrleitungen (Konvektionskubus); 6 Reduziergefäße (R_1 - R_6); 6 Rotameter (Ro_1 - Ro_6); 6 Ventile (V_1 - V_6); 1 Mischgefäß (M); 1 Kühlgefäß (Kü); 2 Druck-Saug-Pumpen, Saugseite (Thermostaten Th_1 und Th_2).

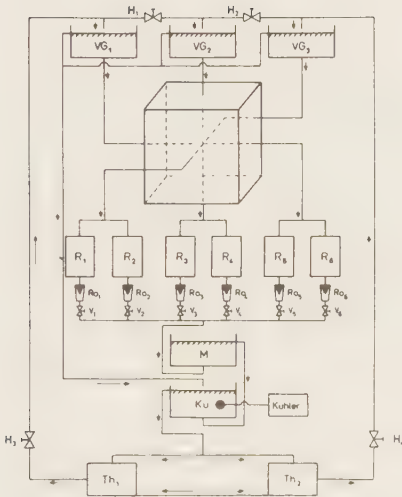


Abb. 4
Schematische Darstellung
des Wasserkreislaufes.

Als strömendes Medium bietet sich Wasser an. Die physikalischen Eigenschaften sind so, daß es in ausreichendem Maße einen blutähnlichen Stoff zu simulieren vermag. Es findet bei allen Experimenten Verwendung.

Der Wasserspiegel in den drei Vorratsgefäßen liegt etwa 2,50 m über dem in den Thermostaten. Am Boden des Vorratsgefäßes befinden sich je 200 vertikale Rohrstutzen, die über die gesamte Bodenfläche gleichsinnig verteilt sind. Gegenüber dem hydrostatischen Druck der Wassersäule in den Vorratsgefäßen, der den Fluß in den 600 an den Rohrstutzen angeschlossenen PVC-Schläuchen treibt, kann, wie Versuche gezeigt haben, die Saugkraft der Thermostaten-Pumpen vernachlässigt werden.

Die am Rande des kreisförmigen Vorratsgefäßbodens mündenden Schläuche sind mit Plexiglasrohren des Konvektionskubus verbunden, die ebenfalls in Randgebieten verlaufen. Hierdurch

wird vermieden, daß eine theoretisch mögliche räumliche Inkonzanz des treibenden Druckes und damit auch der Wasserstromstärken in den "Randschläuchen" gegenüber den zentralgelegenen sich als eine entsprechende Inkonzanz der Konvektion auswirkt.

Ein Nebenkreislauf kommt durch Überlaufleitungen in den Vorratsgefäßen zustande, wodurch die Wasserspiegel und damit die hydrostatischen Drucke konstant gehalten werden. Der Wasserabfluß im Nebenkreislauf war nicht immer störungsfrei. Erst der Einbau von kurzen Luftkaminen direkt hinter den Überlaufstellen (in Abb. 4 nicht gezeichnet) läßt die zwangsläufig im Wasserstrom mitgeführte Luft entweichen. Diese war Ursache dafür gewesen, daß die Überlaufleitungen blockiert und so in einem oder mehreren Vorratsgefäßen der Wasserspiegel bei höher eingestellten Wasserstromstärken anstieg.

Es war nicht möglich, die Druckleistung der beiden Thermostatenpumpen durch passende Ventileinstellungen so zu verteilen, daß die Vorratsgefäße von den Pumpen gemeinsam gespeist werden konnten. Mittels einer Ventilabsperrung H_1 oder H_2 (s. Abb. 4) wurde daher eine Trennung der Belieferungsbereiche durchgeführt, wodurch bei überall konstanter Wasserstromstärke im Konvektionskubus die eine Pumpe die doppelte Wassermenge wie die andere zu befördern hatte. Damit wurde vermieden, daß das eine oder andere Thermostatenbad überlief, was bei gemeinsamer Speisung häufig vorkam. Außerdem konnte nach Trennung der Thermostaten-Zuflußleitungen leicht erreicht werden, daß im Zusammenwirken von Überlaufleitungen und den an den Thermostaten befindlichen Einstellventilen H_3 und H_4 jede gewünschte Wasserstromstärke mit den 6 Ventilen V_1 - V_6 im stationären Betrieb eingestellt werden konnte. Eine zusätzliche Maßnahme, die sich als vorteilhaft erwies, war eine Querverbindung der Thermostatenbäder in Bodenhöhe. Durch die so erhaltene Kommunizierung der Bäder wurde auch bei ungleichen Zu- und Abflüssen eine Gleichvolumenregelung in beiden Thermostaten ermöglicht.

Mit Hilfe der 6 Einstellventile V_1-V_6 und der Rotameter Ro_1-Ro_6 können die Wasserstromstärken in den 6 Koordinaten-Richtungen (x , $-x$, y , $-y$, z , $-z$) im Konvektionskubus eingestellt und gemessen werden. Nach Passage der 6 Reduziergefäße, Rotameter und Einstellventile gelangt das Wasser in ein Mischgefäß. Nachgeschaltet im Kreislauf ist ein Kühlgefäß, in dem mit Hilfe eines automatisch regelnden Kühlers das im Konvektionskubus erwärmte Wasser wieder auf die Starttemperatur gebracht wird, mit dem das Wasser aus den Vorratsgefäßen in den Kubus einfließt. Die Kühloperation wurde aus dem Grunde nicht im Mischgefäß durchgeführt, um eine thermische Rückwirkung auf die Wassertemperatur im Konvektionskubus auszuschließen. Eine Thermostabilisierung des erwärmten Wassers in den Thermostaten, die praktisch möglich wäre, empfiehlt sich nicht, da ein stabilisierender "Gleichlauf" beider Thermostaten nur schwer zu erreichen ist.

Das Fassungsvermögen der Anlage beträgt ca. 300 Liter. Beim Eingeben des Wassers in die Anlage hat man sehr sorgfältig zu verfahren, um eine Blockierung der dünnen Schlauchleitungen durch Luftblasen zu vermeiden. Dies geschieht am zweckmäßigsten so, daß man am Boden der Vorratsgefäße durch eine mehrere Löcher umfassende Saugkappe das Wasser mit einer Wasserstrahlpumpe ansaugt. Bei der Füllung der Anlage wandert das Wasser also in umgekehrter Richtung wie später im Kreislaufbetrieb. Der qualitative Beweis, daß tatsächlich alle Schläuche durchgängig sind, läßt sich sehr eindrucksvoll führen, indem man (verschiedene) Farben in die drei Teilsysteme eingibt (s. Abb. 3).

Der Modellkreislauf kann in einem elektrischen Schaltbild analog nachgebildet werden (Abb. 5). Die hydrostatischen Drucke an den Vorratsgefäßen sind in den elektrischen Spannungen mit eingeschlossen.

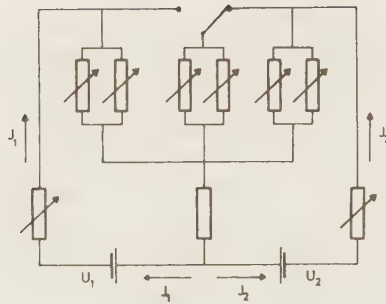


Abb. 5 Elektrisches Ersatzschaltbild des Modellkreislaufes.

Die Kurzschlußverbindung zwischen den Thermostaten (s. Abb. 4), die dafür sorgt, daß der Wasserspiegel in beiden Bädern während des stationären Betriebes in konstanter und gleicher Höhe bleibt, ist im elektrischen Schaltbild durch die Gleichheit der in die Spannungsquelle U_1 bzw. U_2 ein- und ausfließenden Ströme J_1 bzw. J_2 gekennzeichnet.

3. Wärmeleitsonden und Temperaturfühler

In das Zentrum des Konvektionskubus wird der geheizte Sondenkörper eingehängt, die Zuleitungen werden nach oben herausgeführt. Der Vergleichspunkt für die Temperaturdifferenzmessung befindet sich im Innern eines gleich großen Sondenkörpers, der in unmittelbarer Nachbarschaft einer Kubuswandfläche gelegen ist.

Für Temperaturdifferenzmessungen im Kubus werden ausschließlich Thermoelementsonden eingesetzt, die mit 3 Kupfer-Konstanten-Elementen bestückt sind, so daß eine Thermokraft von $3.42 \mu\text{V}/^\circ\text{C} = 126 \mu\text{V}/^\circ\text{C}$ resultiert (s. Abb. 6).

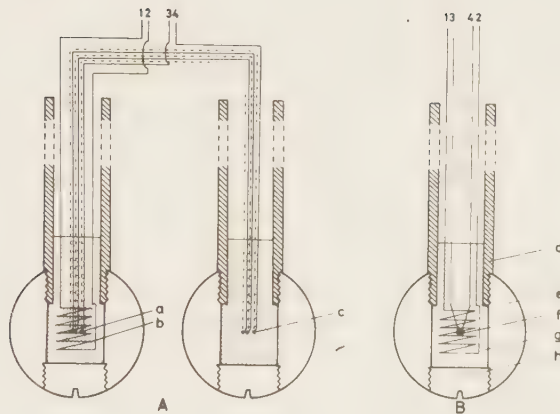


Abb. 6 Sondentypen

A Thermoelement-Sonde B Thermistor-Sonde

————— Kupfer ----- Konstanten

(1,2): Heizleitung (3,4): Meßleitung

- a geheizte Lötstellen,
- b Heizwendel,
- c ungeheizte Lötstellen,
- d Plexiglasrohr,
- e Messingkugel,
- f Thermistor,
- g mit Araldit ausgegossener Raum,
- h Messingschraube

Die Thermistorsonde (Abb. 6) wird für bestimmte Meßaufgaben als Temperaturfühler eingesetzt.

Die mechanischen und elektrischen Daten der Sonde sind:

Sonde A (Thermobatterie): Außenradius 10 mm, zylindrische Ausbohrung $\varnothing$ 5 mm, elektrischer Heizwiderstand 11Ω , Meßleitungswiderstand 32Ω .

Sonde B (Thermistor): Außenradius 10 mm, zylindrische Ausbohrung $\varnothing$ 5 mm, elektrischer Heizwiderstand 11Ω , Thermistorwiderstand 1550Ω bei 20°C .

Zum Aufbau eines ausreichend hohen Temperaturfeldes sind Stromstärken bis 0,3 A notwendig, damit auch die im Konvektionskubus in unmittelbarer Wandnähe verlaufenden Rohre an der Konvektion effektiv teilnehmen können.

Für die Wärmeleistung einer Wärmequelle gilt $N = 0,239 R_H J_H^2$, wobei $0,239 \text{ cal W}^{-1} \text{ s}^{-1}$ das elektrische Wärmeäquivalent, J_H die Heizstromstärke in Ampere und R_H den elektrischen Heizwiderstand in Ohm bedeuten. Bei $J_H = 0,3 \text{ A}$ ergibt sich hieraus eine Heizleistung von $0,24 \text{ cal sec}^{-1}$.

Aus theoretischen Gründen ist ein allzu großer Sondenradius nicht erwünscht. Ist aber der mit Isolationsmaterial vergossene Raum, der die Heizwendel aufnimmt, klein, so kann damit gerechnet werden, daß die durch die Kompaktheit des zentralen Aufbaus bedingte hohe Energiedichte zum Schmelzen der Isolationsmasse und damit zu unerwünschten Fluktuationen des Heizstromes führt. Aus diesem Grunde ist es notwendig, die Größe des Heizwiderstandes, der aus Konstantandraht vom Durchmesser 0,4 mm gebildet ist, und damit die Leistung zu begrenzen.

Eine Abwandlung des beschriebenen Sondentyps besteht darin, daß die zentral gelegenen Lötstellen der Thermobatterie in eine separate Bohrung an der Oberfläche der Sondenkugel situiert werden. Damit ist einmal der Vorteil verbunden, daß nun für die Heizspule ein größerer Raum zur Verfügung steht, wodurch größere Energiedichten vermieden werden können. Der andere positive Aspekt dieser Sondenkonstruktion ist darin zu sehen, daß die Temperatur des die Sonde tangierenden Gewebes unmittelbar gemessen wird (s. III.1 und III.3).

Zur Temperaturmessung an Oberflächen der beschriebenen Sonden mit zentral gelegenen Lötstellen (IV.2) eignen sich kleine zylindrische Sonden ($h = 3,5 \text{ mm}$, $r = 0,6 \text{ mm}$), die sonst bei Durchblutungsmessungen am Myocard Verwendung finden (Typ "Myocardsonde").

4. Fluvograph (Wärmeleitmesser) und Thermistorenbrücke

Der Fluvograph ist ein hochempfindlicher Thermospannungsmesser, mit dem in der Klinik und in der physiologischen Forschung die Durchblutung gemessen wird (Fluvographie). Er besteht aus einem Grundgerät, einem Verstärker und einem Registrierteil. Den schematischen Aufbau zeigt Abbildung 7.

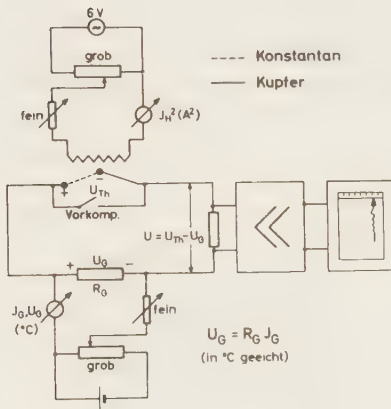


Abb. 7

Schematisches Schaltbild
des Fluvographen.

Das an den Fluvographen angeschlossene Thermoelement erzeugt bei Heizung einer Lötstelle eine Spannung U_{Th} der im Grundgerät eine einstellbare Gegenspannung U_G zugeschaltet wird. Dies geschieht durch eine Potentiometerschaltung mit einem Feineinstellwiderstand. Der eingestellte und an einem Meßinstrument ablesbare elektrische Strom erzeugt an einem Widerstand R_G einen entsprechenden Spannungsabfall (s. Abb. 7). Der Widerstand R_G ist im Vergleich zum Eingangswiderstand des Verstärkers so klein, daß die eingestellte Stromstärke in voller Höhe zum Spannungsabfall beiträgt.

Die Heizstromstärke J_H bzw. deren Quadrat wird in der gleichen Weise wie die Gegenspannung im Heizstromkreis eingestellt und angezeigt. Für eine fluvographische Messung ist es wesentlich, daß die Heizstromstärke über lange Zeiten, die bei

unseren Konvektionsmessungen bis 10 Stunden betragen, nur in dem Maße schwankt, daß die durch Konvektion bedingten Änderungen der Meßgröße nicht verfälscht werden.

Die Eingangsspannung U des Verstärkers ist

$$U = U_{Th} - U_G .$$

Zur Bestimmung der stationären Temperaturdifferenz ΔT zwischen den beiden Sondenkörpern der Wärmeleitsonde wird in einer ersten Meßeinstellung die Thermospannung U_{Th} im Meßkreis des Grundgerätes durch Kurzschließen nicht zugeschaltet und mit der Gegenspannung U_G eine beliebige Eingangsspannung eingestellt, so daß am Schreiber des Fluvographen z.B. 50 Skalenteile angezeigt werden. Die Eingangsspannung am Verstärker ist also

$$U_1 = -U_{G1} \quad (U_{Th} = 0) .$$

Wird nun die Thermospannung im Meßkreis zugeschaltet, so kann man durch Verstellung der Gegenspannung U_{G2} dafür sorgen, daß die gleiche Eingangsspannung am Verstärker und damit auch der gleiche Schreiberausschlag wie vorher zustandekommt. Das bedeutet

$$U_1 = U_2 \quad \text{mit} \quad U_2 = U_{Th} - U_{G2} .$$

Hieraus folgt ohne weiteres

$$U_{Th} = U_{G2} - U_{G1} .$$

Da die Thermokraft der Thermobatterie bekannt ist ($126 \mu V = 1^\circ C$), kann die Anzeige der Gegenspannung U_G unmittelbar in $^\circ C$ erfolgen. Somit ergibt die Differenz der in $^\circ C$ ablesbaren Gegenspannungen unmittelbar die Temperaturdifferenz.

Im allgemeinen war es bei den Konvektionsmessungen notwendig, höhere Temperaturdifferenzen zu messen, als der Meßbereich des Fluvographen es erlaubte. Durch Vergrößerung der Gegen-

spannung mit Hilfe eines von außen zuschaltbaren Gleichspannungsgenerators war man jedoch in der Lage, auch höhere Temperaturdifferenzen in der oben angegebenen Art zu bestimmen.

Der Thermistor als ein Widerstand mit negativem Temperaturkoeffizient ist Teil einer Wheatstone-Brücke. Änderung der Thermistortemperatur führt zu einer meßbaren Verschiebung ΔU der Brückendiagonalspannung (Ausschlagmethode). Im stationären Betrieb besteht außerdem die Möglichkeit, durch meßbare Veränderung (α) eines Ohmschen Brückenwiderstandes (P_1 in Abb. 8) die Brücke nach der Temperaturänderung $T_0 \rightarrow T$ wieder auf $U = 0$ abzugleichen (Nullmethode).

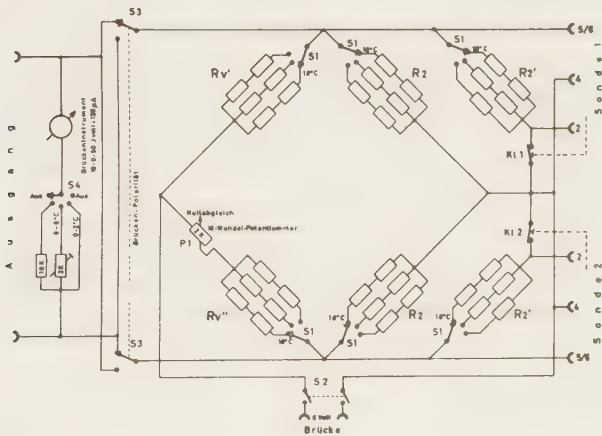


Abb. 8 Thermistorenbrücke

Um die Anzeige zu linearisieren (Hahn, 1965), sind dem Thermistor in der Brücke Ohmsche Widerstände vom Betrage des Thermistorwiderstandes parallelgeschaltet, wodurch die Empfindlichkeit der Anzeige reduziert wird. Folgende lineare Beziehungen sind dann gültig:

$$T - T_0 = \text{const}_1 \cdot \Delta U \quad (\text{Ausschlagmethode; } \Delta d = 0)$$

$$T - T_0 = \text{const}_2 \cdot (\alpha'_1 - \alpha'_2) \quad (\text{Nullmethode; } \Delta U = 0).$$

Hierin bedeuten T_0 die Temperatur des Thermistors, für welche die Brücke abgeglichen ist ($\Delta U = 0$; $d = \alpha_1$).

Der lineare Zusammenhang zwischen Temperaturänderung $T - T_0$ und Anzeige ΔU bzw. $\Delta d = \alpha_1 - \alpha_2$ ist nur für einen kleinen, der Ausgangstemperatur T_0 benachbarten Bereich gültig. Daher sind, um über einen größeren Temperaturbereich linear messen zu können, drei getrennt einschaltbare Widerstandskombinationen für die Basistemperaturen 18°C , 27°C und 37°C in der Brücke vorhanden (in Abb. 8 nur Kombination für 18°C gekennzeichnet).

Wie Abbildung 8 zeigt, wird bei Zuschaltung eines Thermistors (Sonde) auf der einen oder anderen Seite der Brücke ein gleichgroßer Widerstand ausgeschaltet, so daß der Gesamtwiderstand in diesem Brückenarm seinen Wert beibehält. Dies geschieht durch Betätigung eines Klinkensteckers (Kl 1 bzw. Kl 2), wenn in Buchse C_2 der Sondenstecker eingeführt wird. Außerdem besteht die Möglichkeit, zwei Thermistoren in die Brücke einzuschalten, so daß auch Temperaturdifferenzen gemessen werden können. Als Brückeninstrument wird im allgemeinen der Fluvograph mit einer kleinen Spannungsverstärkung eingesetzt.

Abbildung 9 zeigt eine nach Eichung festgelegte Meßkurve, in der die lineare Abhängigkeit von Thermistortemperatur und den Skalenwerten eines Einstellwiderstandes (10 Wendel-Potentiometer) zur Darstellung kommt.

Abbildung 9 s. S. 21

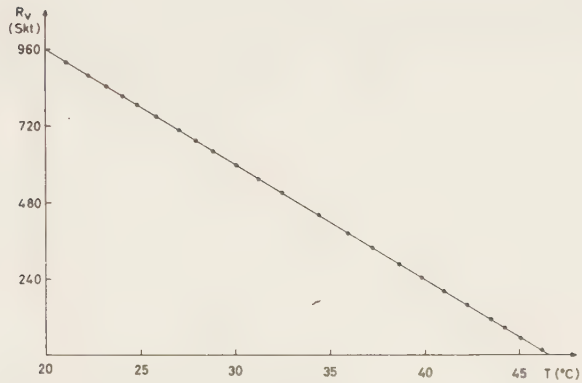


Abb. 9 Lineare Abhängigkeit der Thermistortemperatur von den Skalenwerten (Widerstand) eines Präzisionspotentiometers (Nullmethode).

III. Theorie

1. Stationäres Temperaturfeld im Innen- und Außenraum einer Kugelsonde bei isotroper und homogener Konduktion.

Das stationäre Temperaturfeld in der unendlich ausgedehnten, homogenen und isotropen Umgebung einer kugelförmigen Wärmequelle mit isotroper Emission folgt aus der Differentialgleichung für die konduktive Wärmeleitung

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} = 0.$$

Die allgemeine Lösung lautet:

$$u(r) = A + \frac{B}{r}.$$

Die Wärmeleitfähigkeit des die Sonde umgebenden Mediums sei λ_g . Dann ergibt sich als Lösung im Außenraum $r_i < r < \infty$, wenn r_i der Radius des geheizten Sondenkörpers und u_a die raumkonstante und durch Sondenheizung unbeeinflusste Temperatur ist,

$$u(r) = u_a - \frac{0,239 R_H T_H^2}{4\pi \lambda_g} \frac{1}{r}.$$

Hierbei wurden die Integrationskonstanten A und B durch Erfüllung der Randbedingung an der Sondenoberfläche $r = r_i$,

$$-4\pi r_i^2 \lambda_g \left(\frac{du}{dr} \right)_{r=r_i} = 0,239 R_H T_H^2 = Q_H,$$

sowie der im Unendlichen $r = \infty$,

$$u(\infty) = u_a$$

gewonnen.

Die Größe $Q_H = 0,239 R_H J_H^2$ stellt die sekundlich in der Sonde erzeugte Wärme dar, wenn der Heizwiderstand R_H vom elektrischen Strom J_H durchflossen wird.

Im Innern der Sonde $0 < r \leq r_1$ gilt die Differentialgleichung

$$\lambda_i \left(\frac{d^2 u_i}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du_i}{dr} \right) + q = 0.$$

λ_i ist die effektive Wärmeleitfähigkeit des aus verschiedenen Materialien, Metall und Füllmasse, zusammengesetzten Sondenmediums. Die schichtförmige Geometrie des Sondenbaus bleibt vorerst unberücksichtigt; durch Einführung der Größe λ_i wird ein homogenes Mischmedium im Sondeninnern angenommen.

Für die Wärmequellenenergieabgabe ist zu setzen

$$q = \frac{3 Q_H}{4\pi r_i^3},$$

wobei in Näherung die Wärmewirkung der Heizwendel als über den gesamten Sondenraum gleichmäßig verteilt vorzustellen ist.

Als Lösung erhält man im Sondenraum $0 < r \leq r_1$

$$u_i(r) = A_i + \frac{B_i}{r} - \frac{q}{6\lambda_i} r^2.$$

Die Integrationskonstante B_i verschwindet wegen der Endlichkeitsforderung im Sondenzentrum. Die Berücksichtigung der Randbedingung an der Sondenrenzfläche $r = r_1$, nämlich Gleichheit der Temperaturlösungen zu beiden Seiten dieser Fläche, führt schließlich zu der radialsymmetrischen Lösung

$$u_i(r) = u_a + \frac{Q_H}{4\pi \lambda_0 r_1^3} \left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_i} - \frac{\lambda_0 r^2}{\lambda_i r_1^2} \right).$$

Der Temperaturfühler befindet sich in $r = 0$, so daß als gemessene Temperaturdifferenz gegenüber einem ungeheizten Sondenkörper, dessen Temperatur weder durch äußere noch innere Mitheizung beeinflusst wird, der Ausdruck

$$\Delta_i = u_i(0) - u_a = \frac{Q_H}{4\pi\lambda_G r_i} \left(1 + \frac{\lambda_G}{\lambda_i}\right)$$

resultiert.

Wenn der nicht geheizte Sondenkörper dagegen im Innern des effektiven Temperaturfeldes gelegen ist, so wird die Temperaturdifferenz

$$\begin{aligned} \Delta_i &= u_i(0) - u(r_M) \\ &= \frac{Q_H}{4\pi\lambda_G r_i} \left(1 + \frac{\lambda_G}{\lambda_i} - \frac{r_i}{r_M}\right), \end{aligned}$$

wobei $r = r_M$ die radiale Lagekoordinate des Zentrums der ungeheizten Sondenkugel bedeutet. Es wird angenommen, daß die nichtradialsymmetrische Masseverteilung, die durch die ungeheizte Sondenkugel zustandekommt, die Radialsymmetrie des Temperaturfeldes nicht wesentlich stört.

Neben dieser als äußere Mitheizung zu bezeichnenden Erscheinung ist noch eine weitere Ursache dafür zu nennen, daß die gemessene Temperaturdifferenz reduziert wird. Es tritt nämlich eine innere Mitheizung des ungeheizten Sondenkörpers auf, indem auf Grund des Temperaturgefälles im Innern der Sonde Wärme über die Leitungsdrähte und in geringerem Maße auch über das übrige Sondenmaterial vom geheizten zum ungeheizten Sondenkörper transportiert wird.

Der pro Zeiteinheit übergehende Wärmebetrag sei

$$Q'_r = \beta \cdot \Delta_i$$

β ist der reziproke Leitungswiderstand, der sowohl von den Wärmeleitzahlen der wärmeleitenden Materialien als auch von deren geometrischen Dimensionen (Länge, Querschnitt) abhängt.

Man kann nun annehmen, daß der nicht direkt geheizte Sondenkörper als eine sekundäre Wärmequelle im Leitfähigkeitsraum wirksam ist. Wegen der geringen Wärmequellenenergiebigkeit der sekundären Quelle kann eine einfache Superposition der beiden radialsymmetrischen Temperaturfelder als eine zulässige Näherung angesehen werden.

Die Wärmequellenenergiebigkeit der primären Heizquelle ist um Q_H' zu verringern, so daß jetzt als Temperatur im Zentrum der geheizten Sondenkugel

$$u_i(0) = \frac{Q_H - Q_H'}{4\pi\lambda_g r_i} \left(1 + \frac{\lambda_g}{2\lambda_i}\right) + u_a$$

resultiert.

In $r = r_M$ gilt bei innerer Mitheizung ohne Berücksichtigung des sekundären Temperaturfeldes

$$u(r_M) = \frac{Q_H - Q_H'}{4\pi\lambda_g} \frac{1}{r_M} + u_a$$

Die Superposition des durch innere Mitheizung entstehenden radialsymmetrischen Temperaturfeldes mit Zentrum in $r = r_M$ liefert als Temperatur in diesem Punkt

$$u'(r_M) = \frac{Q_H - Q_H'}{4\pi\lambda_g} \frac{1}{r_M} + \frac{Q_H'}{4\pi\lambda_g} \frac{1}{r_i} \left(1 + \frac{\lambda_g}{2\lambda_i}\right) + u_a$$

Damit wird die gemessene Temperaturdifferenz

$$\vartheta_i = u_i(0) - u(r_M)$$

$$\vartheta_i = \frac{Q_H}{4\pi\lambda_G r_i} \left(1 + \frac{\lambda_G}{2\lambda_i} - \frac{r_i}{r_M} \right) - \frac{Q_H'}{4\pi\lambda_G r_i} \left(2 + \frac{\lambda_G}{\lambda_i} - \frac{r_i}{r_M} \right).$$

Es wurde bei der Ableitung dieser Formel vorausgesetzt, daß die nicht direkt geheizte Sondenkugel bis auf die Heizung in allen übrigen Daten mit dem geheizten Sondenkörper übereinstimmt.

Auflösen der Formel für die Temperaturdifferenz ϑ_i führt zu einem Ausdruck, der als Arbeitsformel für eine Bestimmungsmethode der Wärmeleitzahl eines räumlich ausgedehnten, homogenen und isotropen Mediums mit Hilfe zweier Sondenkugeln angesehen werden kann.

$$\lambda_G = \frac{K_1 \frac{T_H}{\vartheta_i} \left(1 - \frac{r_i}{r_M} \right) - K_2 \left(1 - \frac{r_i}{2r_M} \right)}{1 - \frac{1}{2\lambda_i} \left(K_1 \frac{T_H}{\vartheta_i} - K_2 \right)}$$

mit $K_1 = \frac{0,239 R_H}{4\pi r_i}$

und $K_2 = \frac{\beta}{2\pi r_i}$

Man erkennt leicht, daß im Falle eines Temperaturplateaus im Sondeninnern ($2\lambda_i \gg \lambda_G$) sowie ausfallender äußerer Mitheizung ($r_M = \infty$) die Bestimmungsformel für λ_G in die

bekannte Darstellung

$$\lambda_G = K_1 \frac{J_H^2}{\delta_i^2} - K_2$$

übergeht.

Befindet sich die Wärmeleitsonde im durchbluteten Gewebe, in dem sowohl durch Konduktion als auch durch Konvektion Wärme abtransportiert wird, so wird die λ_G -Formel als Definitionsgleichung für eine Größe λ , die Wärmetransportzahl, benutzt,

$$\lambda = \frac{K_1 \frac{J_H^2}{\delta_i^2} \left(1 - \frac{r}{r_n}\right) - K_2 \left(1 - \frac{r}{2 r_n}\right)}{1 - \frac{1}{2 \lambda_i} \left(K_1 \frac{J_H^2}{\delta_i^2} - K_2\right)}$$

Bei den praktischen Messungen von Wärmeleit- und Wärmetransportzahl geht man so vor, daß zunächst die Sondenkonstanten K_1 und K_2 durch Eichmessungen in mindestens zwei konduktiv leitenden Medien ermittelt werden. Die Berechnung bzw. die graphische Bestimmung gründet sich auf die Formel

$$\lambda_{G,j} = K_{1,eich} \frac{J_H^2}{\delta_{i,j}^2} - K_{2,eich}$$

wobei $\lambda_{G,j}$ und $J_H^2 / \delta_{i,j}^2$ als die Koordinaten bei der graphischen Bestimmung zu gelten haben.

Die rechnerische Auflösung bei Messungen in 2 Eichmedien ($j = 1$ und $j = 2$) liefert

$$K_{1,eich} = \frac{\lambda_{G,1} - \lambda_{G,2}}{J_H^2} \frac{\delta_{i,2}^2 \cdot \delta_{i,1}^2}{\delta_{i,2}^2 - \delta_{i,1}^2}$$

$$K_{2,eich} = \frac{\lambda_{G,1} \cdot \delta_{i,1}^2 - \lambda_{G,2} \cdot \delta_{i,2}^2}{\delta_{i,2}^2 - \delta_{i,1}^2}, \quad (\lambda_{G,1} > \lambda_{G,2})$$

Die so ermittelten Eichkonstanten sind mit den Sondenkonstanten identisch, wenn $\lambda_i = \infty$ gesetzt werden kann. Ist das nicht der Fall, so können aus der vollständigen Bestimmungsgleichung für λ_G bei Kenntnis von λ_i , $\lambda_{G,1}$, $\lambda_{G,2}$ und $(J_H^2/\rho_{i,1})$, $(J_H^2/\rho_{i,2})$ die Sondenkonstanten K_1 und K_2 rechnerisch ermittelt werden.

Daneben besteht natürlich die Möglichkeit, wie die Ausdrücke für K_1 und K_2 zeigen, die Sondenkonstanten mit Hilfe von R_H , r_i und ρ unmittelbar zu berechnen.

Für die in dieser Arbeit verwendeten Wärmeleitsonden kann angenommen werden, daß sowohl innere als auch äußere Mitheizung entfallen ($K_2 = 0$, $r_M = \infty$). Die exakte, den Temperaturhügel im Sondeninnern berücksichtigende Bestimmungsgleichung für die Wärmeleit- bzw. Wärmetransportzahl lautet in diesem Falle dann

$$\lambda \text{ bzw. } \lambda_G = \frac{K_1 \frac{J_H^2}{\rho_i}}{1 - \frac{1}{2\lambda_i} K_1 \frac{J_H^2}{\rho_i}}$$

Wenn $K_2 = 0$ ist, kann die Eichung natürlich mit einem Eichmedium vorgenommen werden. Wie Abbildung 10 zeigt, folgt bei Annahme einer linearen Beziehung zwischen λ_G und J_H^2/ρ_i für die durch Eichung ermittelte Sondenkonstante

$$K_{1,eich} = \frac{\lambda_{G,eich}}{\left(\frac{J_H^2}{\rho_i}\right)_{eich}} = \frac{K_1}{1 - \frac{1}{2\lambda_i} K_1 \left(\frac{J_H^2}{\rho_i}\right)_{eich}}$$

Durch eine einfache Rechnung folgt hieraus weiter

$$K_{1,eich} = K_1 \left(1 + \frac{\lambda_{G,eich}}{2\lambda_i} \right).$$

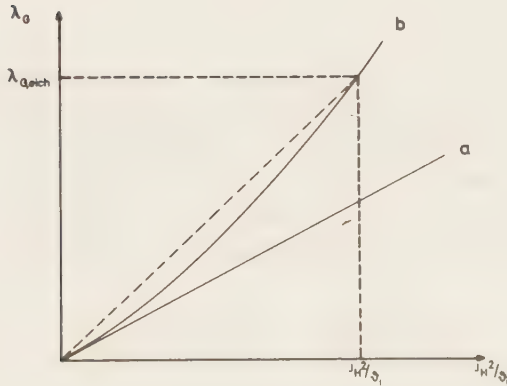


Abb. 10 Zur Bestimmung der Eichkonstanten $K_{1,eich}$ bei fehlender innerer und äußerer Mitheizung, $\lambda_1 = \infty$ (Kurve a), $\lambda_1 \neq \infty$ (Kurve b).

Die Berechnung einer Wärmeleitzahl λ'_G nach der Formel

$$\lambda'_G = K_{1,eich} \frac{j_H^2}{\delta_i^2}$$

und Vergleich mit dem wahren Wert λ_G , der mit Hilfe der Gleichung

$$\lambda_G = \frac{K_1 \frac{j_H^2}{\delta_i^2}}{1 - \frac{1}{2\lambda_i} K_1 \frac{j_H^2}{\delta_i^2}}$$

zu errechnen ist, wird von folgendem relativen Fehler begleitet

$$\frac{\lambda_0 - \lambda'_0}{\lambda_0} = \frac{\lambda'_0 - \lambda_{0, \text{eik}}}{2\lambda_i} = \frac{\lambda_0 - \lambda_{0, \text{eik}}}{\lambda_0 + 2\lambda_i}.$$

2. Das stationäre Temperaturfeld bei zusätzlicher schwacher Konvektion im Außenraum der Wärmeleitsonde.

Die Übertemperatur $\mathcal{L}_i$ im Zentrum einer geheizten Sondenkugel, die von einem unendlich ausgedehnten, homogenen und isotropen Medium der Wärmeleitzahl λ_0 umgeben ist, folgt aus der Formel

$$\mathcal{L}_i = \frac{Q_s}{4\pi r_s \lambda_0} \left(1 + \frac{\lambda_0}{2\lambda_i} \right).$$

Diese Temperatur wird gemessen, wenn die ungeheizte Sondenkugel von innerer und äußerer Mitheizung unbeeinflusst bleibt.

Die Voraussetzung eines unendlich ausgedehnten Mediums kann als erfüllt gelten, wenn die geheizte Sondenkugel sich im Zentrum des kugelförmigen Modellkörpers der Kantenlänge 45 cm befindet. Dies gilt um so mehr, je kleiner die zentrale Übertemperatur und damit die Ausdehnung des effektiven Temperaturfeldes ist.

Wird nun in dem umgebenden Medium Wärme zusätzlich durch Konvektion abgeführt, so kann das dadurch veränderte stationäre Temperaturfeld in Näherung beschrieben werden, wenn vier Voraussetzungen gültig sind, die nicht unabhängig voneinander sind:

1. $Q_K < Q_H = 0,239 R_H J_H^2$ (Q_K = Konvektionswärme).

2. Die konvektive Wärmeabführung ist quasi-isotrop (6 kartesische Koordinatenrichtungen).

3. Das stationäre Temperaturfeld bleibt auch bei konvektiver Wärmeabführung radialsymmetrisch.

4. Die Quellenstärke der Sonde ist $Q_H - Q_K$.

In Abbildung 11 sind die beiden stationären Temperaturfelder mit und ohne Konvektion unter Berücksichtigung dieser Voraussetzungen dargestellt.

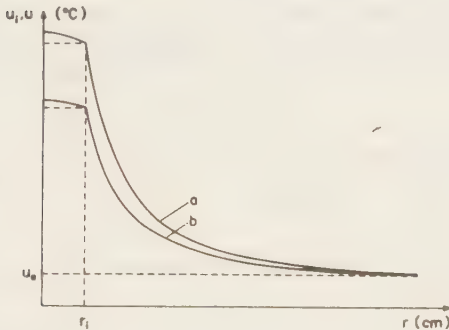


Abb. 11 Stationäre Temperaturfelder bei kugelförmiger Wärmequelle in einer homogenen und isotropen Umgebung unendlich großer Ausdehnung,
a) ohne Konvektion
b) mit Konvektion (Näherung für $Q_K < Q_H$).

Es kann angenommen werden, daß die Konvektionswärme Q_K der 600 den Kubus durchziehenden Rohre nur ein Bruchteil der elektrisch erzeugten Wärme Q_H ist. Das Temperaturfeld im Kubus kann daher in Näherung auch bei quasi-isotroper Konvektion als radial symmetrisch angesehen werden. Die Annäherung an diese für die mathematische Behandlung des Problems erwünschte Symmetrie ist außerdem in ersichtlicher Weise um so besser, je größer die Zahl der Plexiglasrohre im Kubus ist. Anders ausgedrückt, je kleiner die Größe s ist, der Abstand zweier benachbarter "Repräsentationsachsen" (s. Abb. 2). Führt man nun die neue Quellenstärke $Q_H - Q_K$

in die radialsymmetrische Lösung ein, so erhält man für die zentrale Übertemperatur

$$\vartheta_i = \frac{Q_H - Q_K}{4\pi r_i \lambda_G} \left(1 + \frac{\lambda_G}{2\lambda_i} \right).$$

Diese Darstellung der Meßgröße ϑ_i läßt sich nun in der Weise modifizieren, daß für die Quellenstärke die real gegebene Größe Q_H eingesetzt wird, während anstelle der Wärmeleitzahl λ_G die Wärmetransportzahl λ tritt.

Konsequenterweise ist dieser Ersatz an beiden Stellen der Formel durchzuführen, also auch in der Klammer.

Das Ergebnis ist

$$\vartheta_i = \frac{Q_H}{4\pi r_i \lambda} \left(1 + \frac{\lambda}{2\lambda_i} \right).$$

Anschließend werden die ϑ_i -Formeln gleichgesetzt und nach der Wärmetransportzahl λ aufgelöst,

$$\lambda = \lambda_G \frac{1}{1 - \frac{Q_K}{Q_H} \left(1 + \frac{\lambda_G}{2\lambda_i} \right)}.$$

Da $Q_K/Q_H (1 + \lambda_G/2\lambda_i) < 1$ angenommen werden kann, ist eine zulässige Entwicklung dieses Ausdruckes die geometrische Reihe

$$\lambda = \lambda_G \left[1 + \frac{Q_K}{Q_H} \left(1 + \frac{\lambda_G}{2\lambda_i} \right) + \left(\frac{Q_K}{Q_H} \right)^2 \left(1 + \frac{\lambda_G}{2\lambda_i} \right)^2 + \dots \right].$$

Es ist bei der thermischen Durchblutungsmessung mit Wärmeleitsonden üblich, mit der Wärmetransportzahlerhöhung $\Delta\lambda$ zu rechnen. Hierfür erhält man

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_G = \lambda_G \frac{\frac{Q_K}{Q_H} \left(1 + \frac{\lambda_G}{2\lambda_i} \right)}{1 - \frac{Q_K}{Q_H} \left(1 + \frac{\lambda_G}{2\lambda_i} \right)}.$$

Wenn die starke Ungleichung $Q_K \ll Q_H$ gilt, so daß alle Summenglieder mit Exponenten größer als 1 vernachlässigt werden können, ergibt sich für die Wärmetransportzahlerhöhung der folgende Ausdruck

$$\Delta\lambda = \lambda_0 \frac{Q_K}{Q_0} \left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_i} \right).$$

Die theoretische Aufgabe, die Darstellung der Wärmetransportzahlerhöhung $\Delta\lambda$ als Funktion der spezifischen Durchblutung ξ (im Konvektionskubus wird diese Größe als Durchflutung bezeichnet) kann demnach als gelöst betrachtet werden, wenn die Abhängigkeit

$$Q_K = Q_K(\xi)$$

bekannt ist.

3. Stationäres Temperaturprofil in Kugelsonden inhomogener Schichtung.

Anlaß der theoretischen Untersuchung über das Temperaturprofil im Innern von Wärmeleitsonden war die experimentelle Erfahrung, daß die in einem Eichmedium mit bekannter Wärmeleitzahl gemessenen Temperaturdifferenzen die theoretisch ermittelten beträchtlich überstiegen, wenn man bei deren Berechnung im Sondenkörper ein Temperaturplateau voraussetzte. Eine genauere Analyse der experimentellen Ergebnisse führte zwangsläufig zu dem Schluß, daß die Ursache für die Nichtübereinstimmung in der nicht zutreffenden Annahme eines Temperaturplateaus zu suchen war. Diese Schlußfolgerung wurde außerdem dadurch erhärtet, daß eine separate Temperaturmessung am Rand größerer Kugelsonden den Temperaturhügel im Sondeninnern unmittelbar anzeigte (s. IV.2).

Das Innere der geheizten Sondenkugel ist in Näherung als ein konzentrisch geschichteter Körper anzusehen. Der zentralgelegene Temperaturfühler ist von einer zylindrisch gewickelten Heizspule umgeben, deren Durchmesser-Höhen-Verhältnis von der Größenordnung 1 ist. Beide, Heizspule und Temperaturfühler, sind in einer zylindrischen Ausbohrung der Metallkugel aus Messing eingebettet (s. Abb. 6). Die Ausbohrung ist mit Uhu-Plus (Araldit) ausgegossen, das sowohl für eine ausreichende Wärmeleitung als auch für elektrische Isolierung Sorge trägt. Eine zulässige Idealisierung des Sondenaufbaus, die eine theoretische Bestimmung des stationären Temperaturprofils im Sondeninnern ermöglicht, ist in der folgenden Abbildung angegeben.

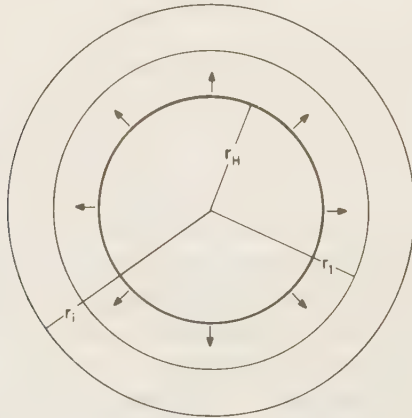


Abb. 12 Idealisierter Innenaufbau eines kugelförmigen Sondenkörpers mit einer homogenen Kugelflächenquelle vom Radius r_H .

Die Heizspirale erscheint in dieser Darstellung als eine homogene Flächenquelle auf einer Kugel vom Radius r_H , und der Temperaturfühler befindet sich im Zentrum $r = 0$.

In den drei konzentrischen Räumen des idealisierten Sondeninnern wird die stationäre Temperaturverteilung durch die gleiche Differentialgleichung beschrieben:

$$\frac{d^2 v_j^i}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dv_j^i}{dr} = 0 \quad (j = 1, 2, 3),$$

mit $v_j^i(r) = u_j(r) - u_a$, wobei u_a die von der Sondenheizung unbeeinflusste Basistemperatur bedeutet. Der Index i , der bei den bisherigen Betrachtungen die Größen im Sondeninnern kennzeichnete, wurde hier der Übersicht halber weggelassen. Die Lösungen sind ebenso von gleicher Gestalt (Gröber, Erk und Grigull, 1955):

$$v_j^i(r) = A_j + \frac{B_j}{r}.$$

Die homogenen Medien in den 3 Sondenräumen mit den Wärmeleitzahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sind:

$j = 1, 0 \leq r < r_H, \lambda_1$ (Uhu-Plus)

$j = 2, r_H < r \leq r_1, \lambda_2$ (Uhu-Plus)

$j = 3, r_1 < r \leq r_i, \lambda_3$ (Messing)

Bei der Kennzeichnung der Wärmeleitzahlen im Sondeninnern wird im folgenden auf den Index G = Gewebe verzichtet.

Eine mögliche stationäre Temperaturlösung, die für den gesamten Außenraum $r > r_i$ Gültigkeit besitzt, rotationssymmetrisch ist und im Unendlichen verschwindet, hat die allgemeine Form

$$v_4^i(r) = B_4 \cdot f(r)$$

mit $f(\infty) = 0$, wobei $f(r)$ eine stetige Funktion bedeutet.

In $r > r_i$ soll außerdem die homogene und isotrope Konduktion durch die Wärmeleitzahl λ_G beschrieben werden. In dem Falle,

daß der Wärmetransport im Außenraum der Sonde nur durch Konduktion erfolgt, gilt $f(r) = \frac{1}{r}$. Für die Integrationskonstanten $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ und B_4 stehen sieben Bestimmungsgleichungen zur Verfügung, eine im Zentrum $r = 0$ und je zwei an den Begrenzungsflächen $r = r_H, r = r_1$ und $r = r_i$. Die Zentrumsbedingung lautet natürlich $\vartheta_1'(0) = \text{endlich}$. Hieraus folgt unmittelbar

$$B_1 = 0.$$

Drei Randbedingungen an den Begrenzungsflächen umschreiben die Gleichheit der sich hier berührenden Temperaturlösungen, die restlichen drei Gleichheit der Wärmeflüsse beidseitig dieser Flächen. Ferner wird angenommen, daß alle Begrenzungsflächen außer der bei $r = r_H$ frei von Quellen und Senken sind. Nach einfacher Rechnung ergeben sich für die übrigen 6 Integrationskonstanten die folgenden Ausdrücke:

$$B_2 = \frac{Q_H}{4\tilde{\lambda}_1}; B_3 = \frac{Q_H}{4\tilde{\lambda}_3}; B_4 = \frac{Q_H}{4\tilde{\lambda}_G} \left(- \frac{1}{r_i^2 \left(\frac{df}{dr} \right)_{r=r_i}} \right)$$

$$A_1 = \frac{Q_H}{4\tilde{\lambda}} \left[\frac{1}{\lambda_1} \left(\frac{1}{r_H} - \frac{1}{r_1} \right) + \frac{1}{\lambda_3} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_i} \right) - \frac{1}{\lambda_G} \frac{f(r_i)}{r_i^2 \left(\frac{df}{dr} \right)_{r=r_i}} \right]$$

$$A_2 = \frac{Q_H}{4\tilde{\lambda}} \left[\frac{1}{\lambda_3} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_i} \right) - \frac{1}{\lambda_1 r_i} - \frac{1}{\lambda_G} \frac{f(r_i)}{r_i^2 \left(\frac{df}{dr} \right)_{r=r_i}} \right]$$

$$A_3 = - \frac{Q_H}{4\tilde{\lambda}} \left[\frac{1}{\lambda_3 r_i} + \frac{1}{\lambda_G} \frac{f(r_i)}{r_i^2 \left(\frac{df}{dr} \right)_{r=r_i}} \right] \quad (\lambda_4 = \lambda_G).$$

Die Größe A_1 ist identisch mit dem gemessenen Wert der Temperaturdifferenz, wenn der Temperaturfühler sich im Zentrum befindet,

$$\vartheta_1(0) = \vartheta_i = A_1.$$

Ist dagegen der Temperaturfühler in $r = r_i$ gelegen, so ist der Meßwert

$$\vartheta_i(r_i) = (\vartheta_i)_{\text{unkorr}} = \frac{Q_{\#}}{4\pi\lambda_G} \left(- \frac{f(r_i)}{r_i^2 \left(\frac{df}{dr} \right)_{r=r_i}} \right)$$

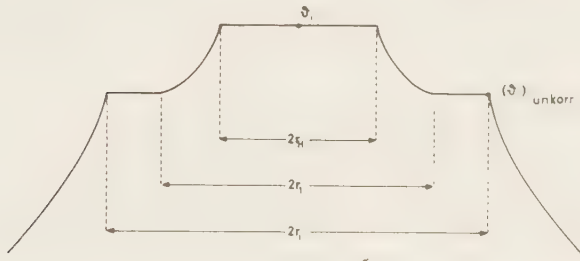


Abb. 13 Stationäres Temperaturfeld im Innern einer idealisierten Kugelsonde vom Radius r_1 .

Der Korrekturfaktor k ist definiert als

$$\vartheta_i = k \cdot (\vartheta_i)_{\text{unkorr}}$$

Die Bedeutung des Korrekturfaktors ist darin zu sehen, daß mit seiner Hilfe aus der Temperaturlösung im Außenraum der Sonde $r > r_1$ auf die im Sondenzentrum gemessene Temperatur bzw. Temperaturdifferenz geschlossen werden kann. Liegt im Sondeninnern ein Temperaturplateau vor, so ist, wie leicht erkennbar, der Korrekturfaktor 1. Die am Sondenrand $r = r_1$ herrschende Temperatur ist dann mit der am Meßort $r = 0$ identisch. Nur in diesem Falle ist die experimentelle λ -Bestimmung mit Sonden ohne Mitheizung, zu deren Feststellung die durch Eichmessung in einem Medium bekannter Wärmeleitzahl $\lambda_{G,\text{eich}}$ gewonnene Sondenkonstante K_1 benötigt wird, nicht mit einem Fehler verbunden, da $K_1 = K_{\text{eich}}$ ist.

Nach einfacher Rechnung ergibt sich für den Korrekturfaktor

der Wert

$$k = 1 - \frac{\lambda_0}{f(r_i)} r_i^2 \left(\frac{df}{dr} \right)_{r=r_i} \left[\frac{1}{\lambda_1} \left(\frac{1}{r_H} - \frac{1}{r_1} \right) + \frac{1}{\lambda_3} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_i} \right) \right].$$

Die Quellen- und Senkenverteilung im Außenraum $r > r_1$ kann als von der Art angesehen werden, daß die stationäre Temperatur überall fallenden Verlauf zeigt, also die Ungleichung

$$\left(\frac{df}{dr} \right)_{r=r_i} < 0$$

Gültigkeit besitzt.

Damit wird

$$k = 1 + \frac{\lambda_0 r_i^2}{f(r_i)} \left| \frac{df}{dr} \right|_{r=r_i} \left[\frac{1}{\lambda_1} \left(\frac{1}{r_H} - \frac{1}{r_1} \right) + \frac{1}{\lambda_3} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_i} \right) \right].$$

Der reale Sondenaufbau erlaubt noch eine weitere Vereinfachung der Formel für den Korrekturfaktor. Da die Differenz der reziproken Radien von gleicher Größenordnung sind,

$$\frac{1}{r_H} - \frac{1}{r_1} \approx \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_i}$$

und außerdem $\lambda_1 \ll \lambda_3$ gilt, kann der zweite Summand in der k-Formel vernachlässigt werden.

Die Gültigkeit der Ungleichung folgt aus dem Wertvergleich für Uhu-Plus und Messing. Für Uhu-Plus gilt

$$\lambda_1 = \lambda_{\text{Uhu-Plus}} = 8 \cdot 10^{-4} \text{ cal cm}^{-1} \text{ sec}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}.$$

Für Messing als Zink-Kupfer-Legierung ist bei den Werten der Metallkomponenten

$$\lambda_{\text{Cu}} = 9380 \cdot 10^{-4} \text{ cal cm}^{-1} \text{ sec}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

und

$$\lambda_{Zn} = 2656 \cdot 10^{-4} \text{ cal cm}^{-1} \text{ sec}^{-1} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1} \text{ (Eckert, 1966)}$$

mit einem ungefähren Wert von

$$\lambda_3 = \lambda_{\text{Messing}} = 5000 \cdot 10^{-4} \text{ cal cm}^{-1} \text{ sec}^{-1} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$$

zu rechnen.

Somit erhält man

$$k = 1 + \frac{\lambda_0 r_c^2}{\lambda_1 r_H} \left(\frac{1}{r_H} - \frac{1}{r_1} \right) \left(\frac{df}{dr} \right)_{r=r_c}$$

und im Falle einer homogenen und isotropen Konduktion im Außenraum der Sonde, $f(r) = \frac{1}{r}$,

$$k = 1 + \frac{r_c \lambda_0}{\lambda_1} \left(\frac{1}{r_H} - \frac{1}{r_1} \right).$$

Aus dem Vergleich des Korrekturfaktors k , den man unter der Annahme einer homogenen Wärmequellenverteilung im Sondeninnern sowie einer effektiven Wärmeleitzahl λ_i des Sondenmaterials gewinnt, und dem für schichtförmigen Sondaufbau gültigen, erhält man einen Ausdruck für λ_i .

Für eine homogene Wärmequellenverteilung im Sondeninnern gilt allgemein

$$k = 1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_i}$$

Der Vergleich mit dem obigen Ausdruck für den Korrekturfaktor k liefert dann

$$\lambda_i = \lambda_1 \frac{r_1 r_H}{2 r_c (r_1 - r_H)}$$

Im allgemeinen Falle, wenn sämtliche Größen wirksam sind, wird

die effektive Wärmeleitzahl λ_i des Sondeninnern

$$\lambda_i = \frac{1}{\lambda_1 \left[\frac{1}{\lambda_2} \left(\frac{1}{r_H} - \frac{1}{r_1} \right) + \frac{1}{\lambda_3} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_i} \right) \right]}$$

Man erkennt leicht, daß im Falle $\lambda_1 \ll \lambda_3$ die Dicke der Uhu-Plus-Schicht, die zwischen der Heizfläche des Radius r_H und der inneren Randfläche der Messingausbohrung ($r = r_1$) liegt, wesentlich ist. Je dicker diese Schicht ist, um so mehr weicht das Temperaturprofil im Sondeninnern von dem eines Plateaus ab (s. Abb. 13).

4. Die Durchflutung im kartesischen Konvektionsmodell.

Im Innern des würfelförmigen Konvektionskörpers verlaufen mit äquidistanten Abständen je 100 Plexiglasrohrpaare in den drei durch den Kantenverlauf des Kubus vorgegebenen Richtungen. Insgesamt durchziehen somit, wie schon erwähnt, 600 gleiche Rohre den würfelförmigen Gewebekörper. Der lichte Abstand zweier Rohre, die ein Paar bilden, ist gleich dem äußeren Durchmesser $2R_a$ eines Rohres. Soll die isotrope Konvektionswirkung untersucht werden, so werden die Rohre eines Paares von der gleichen Wasserstromstärke, jedoch in gegenläufiger Richtung durchflossen. Durch den besonderen Aufbau eines Knotenpunktes, in dem sich drei in den verschiedenen Koordinatenrichtungen verlaufende Rohrpaare treffen (s. Abb. 2), ist dann gewährleistet, daß bei dem gegenläufigen Wasserfluß in einem Rohrpaar die radiale Symmetrie des Temperaturfeldes nicht wesentlich gestört wird. Der Symmetriefehler fällt um so geringer aus, je dichter die homogene Verteilung der Rohrpaare und damit der Knotenpunkte im Konvektionskubus ist. In Abb. 14 ist der Konvektionskubus mit verschiedener Färbung des Wassers in den drei Koordinatenrichtungen bei stehendem Wasser dargestellt.

Jedes Rohr mit dem lichten Durchmesser $2R_i$ möge nun von Wasser mit der mittleren Geschwindigkeit $\bar{v}$ durchflossen werden. Die Stromstärke in jedem Rohr ist somit

$$j_i = R_i^2 \bar{\pi} \bar{v}$$

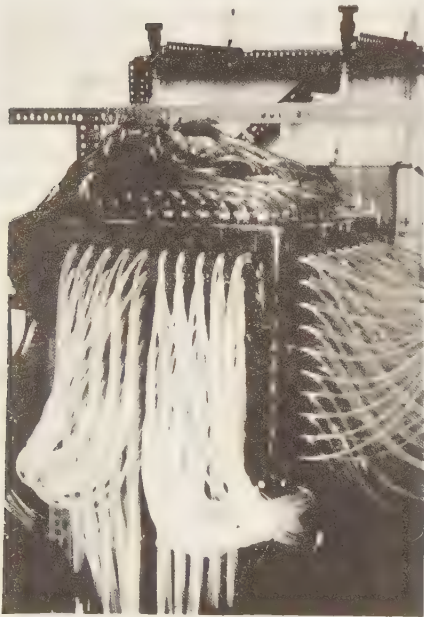


Abb. 14
Der Konvektionskubus
(ohne Sand)

In Analogie zur physiologischen Definition der spezifischen Durchblutung wird nun die spezifische Durchflutung in der Einheit ml (Wasser) / 100 g (Sand) · min angegeben. Da das Würfelvolumen $V = 1^3(\text{cm}^3)$ von $600 R_i^2 \bar{\pi} \bar{v}(\text{cm}^3)$ Wasser in der Sekunde durchflossen wird, erhält man für die homogene spezifische Durchflutung, wenn $\bar{v} = \text{const}$,

$$S = 36 \cdot 10^5 \frac{R_i^2 \bar{\pi} \bar{v}}{l^3 S_i} = 12,013 \bar{v}$$

Die eingesetzten numerischen Werte lauten wie folgt:

$R_i = 0,15 \text{ cm}$, $l = 45 \text{ cm}$, $\rho_G = \text{Dichte von Sand} = 1,59 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$.

Bei der Angabe der Gewebedichte ρ_G kann die Heterogenität der Massenverteilung im Konvektionskubus vernachlässigt werden, da der relative Raumanteil der Plexiglasrohre samt Inhalt nur etwa 5 % beträgt. Außerdem kommt hinzu, daß die verschiedenen Dichten von Sand, Plexiglas und Wasser nicht wesentlich differieren.

Um den Fall einer inhomogenen Durchflutung quantitativ beschreiben zu können, ist ein Abzählmodus für die einzelnen Durchflußrohre notwendig. In jede der sechs kartesischen Koordinatenrichtungen ($\pm x$, $\pm y$, $\pm z$) verlaufen je 100 Rohrflüsse. Die Rohre, die z.B. in x-Richtung verlaufen, können numeriert und abgezählt werden, indem man die Koordinaten der "Repräsentationsachsen" in der Mittelebene $x = 0$ angibt. In der Abb. 15 stellt demnach ein Punkt zwei Rohre eines Paares dar, bzw. deren "Repräsentationsachse" mit den Koordinaten (n,p) .

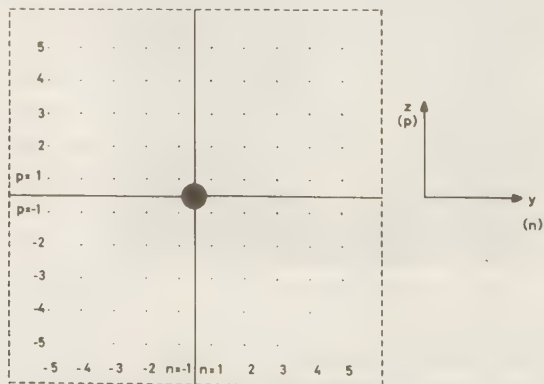


Abb. 15 Abzählschema der in x-Richtung verlaufenden Rohre. Die Rohre eines Paares werden durch den Durchstoßpunkt ihrer "Repräsentationsachse" in der Ebene $x = 0$ und damit durch eine (n,p) -Kombination angegeben. Gestrichelte Linie innerer Kubusrand.

Die mittlere Geschwindigkeit in einem Rohr eines Paares mit der Ortsangabe (n,p) werde mit $\bar{v}'_{n,p}$ bezeichnet, im anderen mit $\bar{v}''_{n,p}$. Für die in y- und z-Richtung verlaufenden Rohre bzw. Rohrpaare sind die Zähleinheiten in den Mittelebenen $y = 0$ und $z = 0$ (m,p) bzw. (m,n).

Damit erhält man im Falle einer inhomogenen Durchflutung den Ausdruck

$$\xi = \frac{6 \cdot 10^5 R_i^2 \tilde{\alpha}}{l^3 s_G} \left\{ \sum_{n=-5}^{n=5} \sum_{p=-5}^{p=5} (\bar{v}'_{np} + \bar{v}''_{np}) + \sum_{m=-5}^{m=5} \sum_{p=-5}^{p=5} (\bar{v}'_{mp} + \bar{v}''_{mp}) + \sum_{m=-5}^{m=5} \sum_{n=-5}^{n=5} (\bar{v}'_{mn} + \bar{v}''_{mn}) \right\}.$$

Aus apparatetechnischen Gründen sind 600 verschiedene mittlere Geschwindigkeiten nicht einzustellen. Allerdings besteht die Möglichkeit, die Fließgeschwindigkeit des Wassers in 100 Rohren, die in einer der sechs kartesischen Richtungen verlaufen, im ganzen zu variieren. Mit sechs Einstellvariablen für die Größe $\bar{v}$ folgt damit für die spezifische Durchflutung

$$\xi = \frac{6 \cdot 10^5 R_i^2 \tilde{\alpha}}{l^3 s_G} (\bar{v}'_{np} + \bar{v}''_{np} + \bar{v}'_{mp} + \bar{v}''_{mp} + \bar{v}'_{mn} + \bar{v}''_{mn}).$$

Ist dagegen die mittlere Wassergeschwindigkeit $\bar{v}$ in allen Rohren gleich, so gilt für die spezifische Durchflutung

$$\xi = \frac{36 \cdot 10^5 R_i^2 \tilde{\alpha}}{l^3 s_G} \cdot \bar{v}.$$

Mit der in diesem Fall von allen Rotametern gleich angezeigten Wasserstromstärke

$$J = 100j = 100 R_i^2 \bar{v}$$

erhält man hieraus

$$\xi = \frac{36 \cdot 10^3}{l^3 g} \cdot J \quad [J] = \text{cm}^3 \text{sec}^{-1}$$

Wenn die Durchflutung homogen ist, d.h. die $\bar{v}$ -Werte für alle Rohre gleich sind, folgt wegen der Gegenläufigkeit der Wasserdurchflüsse sowie der zentralen Lage des Heizkörpers, daß die den Konvektionskubus verlassenden Konvektionswärmen je Rohr eines Paares gleich sind. Da der Rohrabstand eines Paares sehr klein ist, kann wegen des Wärmeaustausches zwischen den Rohren eines Paares im Gewebemedium (Sand) in Näherung angenommen werden, daß transversal benachbarte Rohrwandstellen sich auf gleicher Temperatur befinden. Das ist gleichbedeutend mit einer zur Mittelebene spiegelsymmetrischen Verteilung der Rohrwandtemperatur, die der auf der "Repräsentationsachse" herrschenden gleichgesetzt wird.

Die Spiegelsymmetrie der Rohrwandtemperatur ist an die zusätzliche Forderung geknüpft, daß das Wasser überall mit der gleichen Temperatur in den Kubus einfließt. Im allgemeinen ist diese identisch mit u_0 , der Basistemperatur im Konvektionskubus, wenn die zentrale Sondenkugel ungeheizt ist. Die Abzählung der den einzelnen Rohren zuzuordnenden Konvektionswärmen q_K und damit die Aufstellung des Summenausdruckes für die Größe Q_K ist im Falle einer homogenen Durchflutung relativ einfach. Zunächst ist klar, daß bei der Abzählung jede Koordinatenrichtung gleichberechtigt ist. Wie bereits erwähnt, gilt das gleiche auch für die gegenläufigen Richtungen. Die dann noch zu berücksichtigenden 100 Rohre, deren Durchflüsse in eine Richtung verlaufen, sind durch eine Drehsymmetrie ausgezeichnet. Bei einer 90°-Drehung um die mit den Rohren parallel verlaufende Koordina-

tenachse geht das Verteilungsbild der Konvektionswärmen q_K in sich über. Man braucht daher nur den vierten Teil der 100 Rohre, d.h. die Konvektionswärmen von 25 Rohren zu berechnen. Nimmt man z.B. die Rohre der x-Richtung, mit denen die Gesamtkonvektionswärme Q_K berechnet werden soll, so erhält man

$$Q_K = 24 \sum_{n=1}^5 \sum_{p=1}^5 q_K(x; n, p).$$

Hierbei bedeutet $q_K(x; n, p)$ die in x-Richtung den Konvektionskubus verlassende Konvektionswärme des Rohres mit den Indices (n, p).

Das stationäre Temperaturfeld im Konvektionskubus ist, wenn der geheizte Sondenkörper im Zentrum gelegen und keine Konvektion vorhanden ist ($\bar{v} = 0$)

$$u(r) = u_a + \frac{Q_K}{4\pi \tilde{\lambda}_G} \frac{1}{r}.$$

r ist der zentrale Abstand eines Gewebepunktes (Sand). Die Heterogenität der Masseverteilung im Konvektionskubus kann wegen des geringen Raumanteiles von Plexiglas und Wasser vernachlässigt werden, so daß für λ_G die Wärmeleitzahl des Sandes einzusetzen ist. Als Rohrwandtemperatur $u_W(x; n, p)$, die für die Berechnung der Größe $q_K(x; n, p)$ bekannt sein muß, kann die entlang der Repräsentationsachse herrschende Gewebetemperatur genommen werden. Die Breitenausdehnung eines Rohres sowie das räumliche Nebeneinander der Rohre eines Paares wird also vernachlässigt. Aus Abb. 15 ist leicht zu erkennen, daß für den zentralen Abstand eines Punktes auf der Repräsentationsachse (n, p) mit der Koordinate x der folgende Ausdruck gilt

$$r(x; n, p) = \sqrt{x^2 + (n - \frac{1}{2})^2 s^2 + (p - \frac{1}{2})^2 s^2}.$$

Für die Wandtemperatur $u_W(x; n, p)$ folgt somit

$$u_W(x; n, p) = u_a + \frac{Q_K}{4\pi \tilde{\lambda}_G} \frac{1}{\sqrt{x^2 + s^2[(n - \frac{1}{2})^2 + (p - \frac{1}{2})^2]}}$$

bzw. wenn die um Q_K verminderte Quellenstärke (s. III.2) in Rechnung gesetzt wird,

$$u_W(x, r, \rho) = u_a + \frac{Q_N - Q_K}{4\bar{K}\lambda_G} \frac{1}{\sqrt{x^2 + s^2 \left[\left(n - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\beta - \frac{1}{2} \right)^2 \right]}}$$

5. Wärmeübergang in laminarer Rohrströmung

a. Wandtemperatur $u_W = T_W = \text{const}$

Die Flüssigkeitstemperatur im Innern eines Zylinderrohres der Länge l und mit dem inneren Durchmesser $2R_1$ wird zur Unterscheidung von der "Gewebetemperatur" u in der folgenden Darstellung mit T bezeichnet. Außerdem hat die Rohrlängskoordinate nicht wie in III.4 am Eingang den Wert $x = \pm \frac{1}{2}$, sondern $x = 0$. Bei $x = 0$ trete die Flüssigkeit (Wasser) mit ausgebildetem parabolischen Geschwindigkeitsprofil

$$v(s) = 2\bar{v} \left(1 - \frac{s^2}{R_1^2} \right)$$

und einer querschnittskonstanten Temperatur $T = T_0 = u_a$ in das Zylinderrohr ein. s bedeutet die radiale Komponente eines Flüssigkeitselementes und $\bar{v}$ ist die mittlere Geschwindigkeit

$$\bar{v} = \frac{2}{R_1^2} \int_0^{R_1} v(s) \cdot s \cdot ds$$

Die Existenz eines ausgebildeten parabolischen Geschwindigkeitsprofils bei $x = 0$ besagt, daß die hydrodynamische Anlaufstrecke der Wärmeübergangszone $x = 0$ bis $x = 1$ vorgeschaltet ist.

Die in Abb. 16 angegebene mittlere Flüssigkeitstemperatur $T_m(x)$ ist die, welche man in einem Mischgefäß messen könnte, wenn die

Flüssigkeit an der Stelle x das Rohr verlassen und darin aufgefangen würde. Sie kann in der folgenden Form dargestellt werden,

$$T_m(x) = \frac{2}{R_i^2 \bar{\rho}} \int_0^{R_i} \nu(s) \cdot T(s, x) s ds.$$

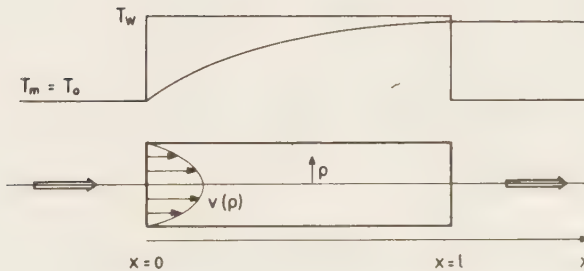


Abb. 16 Zum Wärmeübergang in laminarer Rohrströmung.
Wandtemperatur $T_w = \text{const} > T_0$.

Bei der Rohrströmung seien die folgenden Randbedingungen gegeben:

$$x = 0, \quad s = R_i; \quad T = T_0 = u_a$$

$$x = 0, \quad s = R_i; \quad T = T_w > T_0.$$

Wir rechnen mit einer Flüssigkeitserwärmung bei Passieren des Rohres, d.h. es gilt $T_w = \text{const} > T_0$. Eine Wärmeleitung in x -Richtung kann gegenüber der Konvektion vernachlässigt werden, was durch die Ungleichung

$$\frac{\partial^2 T}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial T}{\partial s} \gg \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

(radiale Konduktion)

(longitudinale Konduktion)

beschrieben wird. Außerdem ist die Temperaturabhängigkeit der physikalischen Flüssigkeitsdaten so gering, daß eine wesentliche Beeinflussung des rotationssymmetrischen Strömungsfeldes durch die Temperatur ausgeschlossen werden kann. Die stationäre Flüssigkeitstemperatur $T(s, x)$ kann nach Einführen der dimensionslosen Koordinaten

$$s' = \frac{s}{R_i} \quad \text{und} \quad x' = \frac{x}{R_i}$$

durch die folgende Differentialgleichung beschrieben werden,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial s'^2} + \frac{1}{s'} \frac{\partial T}{\partial s'} - Pe(1 - s'^2) \frac{\partial T}{\partial x'} = 0.$$

Hierin bedeutet Pe die dimensionslose Péclet-Zahl

$$Pe = \frac{\lambda R_i \bar{v}}{a}$$

mit a als der Temperaturleitzahl der Flüssigkeit,

$$a = \frac{\lambda_{Fl}}{\rho_{Fl} c_{Fl}}$$

Die drei Größen in dieser Gleichung bedeuten Wärmeleitzahl (λ_{Fl}), Dichte (ρ_{Fl}) und spezifische Wärme (c_{Fl}) der Flüssigkeit (Wasser).

Obige Differentialgleichung stellt die stationäre Wärmebilanz eines Flüssigkeitsvolumenelementes bei radialer Konduktion (1. und 2. Summand) sowie longitudinaler Konvektion (3. Summand) dar.

Mit wachsendem x muß sich die Flüssigkeitstemperatur der konstanten Wandtemperatur T_W angleichen. Daher ist der folgende Lösungsansatz sinnvoll,

$$T(s', x') = T_W + B \psi(s') \cdot e^{-kx'}$$

B und k sind Integrationskonstanten, die mit Hilfe der Randbedingungen zu ermitteln sind. Der Lösungsansatz führt zunächst

durch Einsetzen zu der gewöhnlichen Differentialgleichung für die Größe $\gamma(s')$,

$$\frac{d^2 \gamma}{ds'^2} + \frac{1}{s'} \frac{d\gamma}{ds'} + kR(1-s'^2) \cdot \gamma(s') = 0.$$

Mit Hilfe des Produktsatzes

$$\gamma(s') = e^{-\frac{1}{2}\sqrt{kR} \cdot s'^2}$$

und einer neuen Variablen

$$z = \sqrt{kR} \cdot s'^2$$

wird man für die Funktion $\phi(s')$ auf die konfluente hypergeometrische Differentialgleichung geführt. Diese lautet in der allgemeinen Form

$$z \frac{d^2 \phi}{dz^2} + (\gamma - z) \frac{d\phi}{dz} - \alpha \phi(z) = 0$$

Hier ist im besonderen

$$\gamma = 1, \quad \alpha = \frac{2 - \sqrt{kR}}{4}.$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist als konfluente hypergeometrische Funktion bekannt und kann durch die folgende Reihe dargestellt werden

$$\phi(z) = F(\alpha, \gamma; z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n-1)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2) \cdots (\gamma+n-1)} \frac{z^n}{n!}.$$

Man erhält somit für die rotationssymmetrische Temperaturverteilung im Rohr

$$T(s', x) = T_w + B \cdot e^{-kx'} \cdot e^{-\frac{1}{2}\sqrt{kR} s'^2} \cdot F\left(\frac{2 - \sqrt{kR}}{4}, 1; \sqrt{kR} s'^2\right)$$

Die noch unbekannte Größe k kann aus der folgenden Randbedingung abgeleitet werden:

$$x' \geq 0, s' = 1 : T(1, x') = T_w = \text{const.}$$

Die Gleichheit der Temperaturen von Rohrwand und anhaftender Flüssigkeitsschicht führt unmittelbar auf

$$F\left(\frac{2 - \sqrt{kR}}{4}, 1; \sqrt{kR}\right) = 0.$$

Die Nullstellen dieser Gleichung mit $\sqrt{kR}$ als Veränderliche sind zu ermitteln. Die drei ersten Werte sind

$$\mu_1 = 2,705 \quad \mu_2 = 6,679 \quad \mu_3 = 10,674$$

(Bodnarescu, 1955).

Die Vielzahl der somit bekannten Eigenwerte

$$k_n = \frac{\mu_n^2}{R}$$

läßt die Lösung als eine unendliche Reihe erscheinen, wobei natürlich auch die noch unbestimmte Integrationskonstante B von Glied zu Glied verschieden ausfallen kann. Man erhält somit

$$T(s', x') = T_w + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot e^{-\frac{\mu_n^2}{R} x'^2} \cdot e^{-\frac{\mu_n^2}{2} s'^2} \cdot F\left(\frac{2 - \mu_n}{4}, 1; \mu_n s'^2\right).$$

Die noch unbekannten Größen B_n ergeben sich aus der Randbedingung bei

$$x' = 0, s' < 1 : T(s', 0) = T_0$$

sowie mit Hilfe der Orthogonalität der Eigenfunktionen

$$\vartheta_n(s') = e^{-\frac{\mu_n^2}{2} s'^2} \cdot F\left(\frac{2-\mu_n}{4}, 1; \mu_n s'^2\right).$$

Das Ergebnis, die stationäre Flüssigkeitstemperatur im Rohr als Funktion der Ortskoordinaten, lautet dann:

$$T(s', x') = T_W + (T_0 - T_W) \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot e^{-\frac{\mu_n^2}{Pe} x'} \cdot e^{-\frac{\mu_n^2}{2} s'^2} \cdot F\left(\frac{2-\mu_n}{4}, 1; \mu_n s'^2\right)$$

mit
$$C_n = -\frac{2}{\mu_n} \frac{1}{\left(\frac{\partial \vartheta_n(s')}{\partial \mu_n}\right)_{s'=1}}.$$

Diese Temperaturformel ist sowohl für Temperatursprünge $T_0 < T_W$ als auch für $T_0 > T_W$ am Rohreingang gültig. Für die Berechnung des Wärmeübergangs zwischen Rohrwand und Flüssigkeit ist die Kenntnis der Wärmeübergangszahl α bzw. der damit verbundenen dimensionslosen Nusselt-Zahl Nu notwendig. Drei Definitionen beider Größen sind möglich, je nachdem man die Wärmeübergangszahl α im Ansatz von Newton für die übergehende Wärme ΔQ pro Flächen- und Zeiteinheit,

$$\Delta Q = \alpha \cdot \Delta T,$$

auf den Temperatursprung $T_0 - T_W$ bei $x = 0$, auf die ortsvariable Größe $T_m(x) - T_W$ oder auf die ebenfalls ortsvariable Größe $T(0, x) - T_W$ bezieht. $T(0, x)$ bedeutet die stationäre Flüssigkeitstemperatur auf der Rohrachse $s' = 0$.

Allgemein gilt:

$$\begin{aligned} (Nu(x))_j &= \frac{(\alpha(x))_j \cdot 2R_i}{\lambda_{Fl}} \\ &= -\frac{2}{(\Delta T)_j} \left(\frac{\partial T(s', x)}{\partial s'} \right)_{s'=1} = -\frac{2R_i}{(\Delta T)_j} \left(\frac{\partial T(s, x)}{\partial s} \right)_{s=R_i} \end{aligned}$$

mit $(\Delta T)_1 = T_o - \bar{T}_w, (\Delta T)_2 = \bar{T}_m(x) - \bar{T}_w, (\Delta T)_3 = T(o, x) - \bar{T}_w.$

Die 2. und 3. Version zeichnen sich dadurch aus, daß die Nusselt-Zahlen für große Einlaufkennzahlen $x' (2R_1 Pe)^{-1}$ einem endlichen Grenzwert zustreben,

$$\lim_{\frac{x}{2R_1 Pe} \rightarrow \infty} (Nu(x))_2 = 3,65 \quad \lim_{\frac{x}{2R_1 Pe} \rightarrow \infty} (Nu(x))_3 = 2,03.$$

Für $(Nu(x))_1$ gilt hingegen

$$\lim_{\frac{x}{2R_1 Pe} \rightarrow \infty} (Nu(x))_1 = 0.$$

Im folgenden wird nur mit der ersten Version gerechnet, so daß die Nusselt-Zahl ohne Index geschrieben werden kann.

Die Ausrechnung liefert für die örtliche Nusselt-Zahl $Nu(x)$,

$$\begin{aligned} (Nu(x)) &= -\frac{2R_i}{T_o - \bar{T}_w} \left(\frac{\partial T(s, x)}{\partial s} \right)_{s=R_i} = 2,996 \cdot e^{-14,64 \frac{1}{Pe} \frac{x}{2R_i}} \\ &+ 2,208 \cdot e^{-19,2 \frac{1}{Pe} \frac{x}{2R_i}} + 1,833 \cdot e^{-22,80 \frac{1}{Pe} \frac{x}{2R_i}} + \dots \end{aligned}$$

Die auf der Rohrlänge l infolge der Wandübertemperatur $T_W - T_0$ in die Flüssigkeit übergehende und das Rohr konvektiv verlassende Wärmemenge je Zeiteinheit q_K läßt sich nun in folgender Weise darstellen,

$$q_K = \int_0^l \alpha(x) (T_W - T_0) \cdot 2\pi R_i dx = \pi l \lambda_{Fl} (T_W - T_0) \bar{Nu}(l)$$

mit $\bar{Nu}(l)$ als der mittleren Nusselt-Zahl

$$\bar{Nu}(l) = \int_0^l Nu(x) dx$$

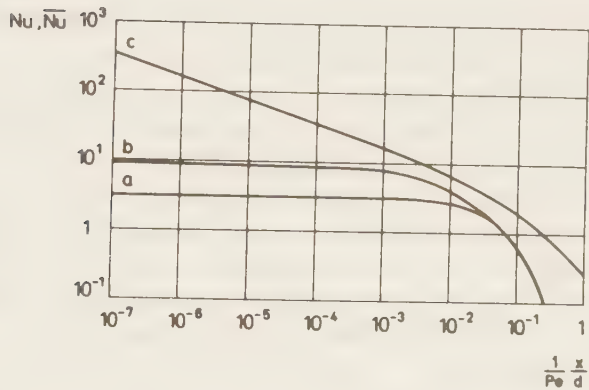


Abb. 17 Örtliche und mittlere, auf den Temperatursprung $T_0 - T_W$, bezogene Nusselt-Zahl als Funktion der Einlaufkennzahl $\frac{1}{Pe} \cdot \frac{x}{d}$ ($d = 2R_i$)

- a) 1. Eigenfunktion
- b) 1.-4. Eigenfunktion
- c) mittlere Nusseltzahl (nach Bodnarescu, 1955).

b. Wandtemperatur ortsvariabel, $T_W = T_W(x)$

Die Flüssigkeit fließt mit der querschnittskonstanten Temperatur T_0 bei $x = 0$ in das Zylinderrohr vom Halbmesser R_1 ein. Gefragt ist zunächst nach dem Wärmeübergang zwischen $x = 0$ und $x = l$, dem Rohrende, wenn die Rohrwand eine in x -Richtung treppenförmige Temperaturverteilung besitzt (Abb. 18).

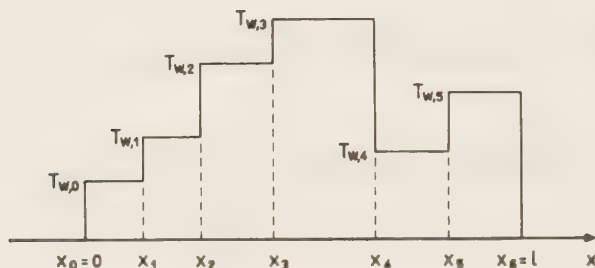


Abb. 18 Treppenförmiger Verlauf der Wandtemperatur eines zylindrischen Rohres

Jeder Temperatursprung $T_{W,j} - T_{W,j-1}$ an der Stelle x_j läßt einen Wärmeübergang folgen, der ungestört von Temperatursprüngen, die an Stellen $x > x_j$ zusätzlich stattfinden, bis zum Rohrende $x = l$ abläuft. Die den einzelnen Sprüngen zuzuordnenden Wärmeübergänge können also summiert werden, und das Ergebnis ist die insgesamt in der Zeiteinheit die Rohrwand der Länge l passierende Wärme. So gilt für den Wärmebetrag, der infolge des Temperatursprunges bei $x = 0$ aus Medium wechselt

$$\begin{aligned}
 q_{K,0} &= \lambda_{FL} \int_0^l \left(\frac{\partial T(s,x)}{\partial s} \right)_{s=R_1} \cdot 2\pi R_1 dx \\
 &= \tilde{\lambda}_{FL} (\bar{T}_{W,0} - T_0) \int_0^l \mathcal{N}_u(x) dx = \tilde{\lambda}_{FL} (\bar{T}_{W,0} - T_0) l \bar{\mathcal{N}}_u(l)
 \end{aligned}$$

Der Richtungssinn des Wärmeüberganges wird durch das Vorzeichen des Sprunges $T_{W,0} - T_0$ bestimmt.

Allgemein gilt für den an der Stelle $x = x_j$ beginnenden und durch den Sprung $T_{W,j} - T_{W,j-1}$ verursachten Wärmeübergang

$$q_{K,j} = \pi \lambda_{Fl} (T_{W,j} - T_{W,j-1}) (l - x_j) \bar{Nu}(l - x_j)$$

mit der mittleren Nusseltzahl

$$\bar{Nu}(l - x_j) = \frac{1}{l - x_j} \int_0^{l-x_j} Nu(x) dx$$

Für die gesamte Übergangswärme folgt somit

$$q_K = \sum_{j=0}^{N-1} q_{K,j} = \pi \lambda_{Fl} \sum_{j=0}^{N-1} (T_{W,j} - T_{W,j-1}) (l - x_j) \bar{Nu}(l - x_j),$$

wobei N die Anzahl der Temperatursprünge in $0 \leq x < l$ bedeutet. Es gilt $T_{W,-1} = T_0$.

Nimmt man nun an, wie es für die einzelnen Zylinderrohre im stationären Temperaturfeld im Innern des Konvektionskubus zutrifft, daß der Temperaturverlauf an der Rohrwand ein kontinuierlich veränderlicher ist, $T_W = T_W(x)$, so wird wegen

$$T_{W,j} - T_{W,j-1} = \frac{dT_W}{dx} dx$$

der Ausdruck für die Übergangswärme

$$q_K = \pi \lambda_{Fl} \int_0^l \frac{dT_W}{dx} (l - x) \bar{Nu}(l - x) dx$$

Unter Berücksichtigung des bereits aufgeführten Ausdruckes für die örtliche Nusseltzahl $Nu(x)$ erhält man für die mittlere Nusseltzahl $\bar{Nu}(l - x)$

$$\begin{aligned}\bar{N}_w(l-x) &= \frac{2R_i Pe}{l-x} a_1 \left(1 - e^{-\frac{b_1(l-x)}{2R_i Pe}}\right) \\ &+ a_2 \left(1 - e^{-\frac{b_2(l-x)}{2E_i Pe}}\right) \\ &+ a_3 \left(1 - e^{-\frac{b_3(l-x)}{2\pi_i Pe}}\right) \\ &+ \dots\end{aligned}$$

mit $a_1 = 0,2046$	$a_2 = 0,0248$	$a_3 = 0,008$
$b_1 = 14,64$	$b_2 = 39,2$	$b_3 = 228,0$

6. Konvektiver Wärmeabfluß im kartesisch durchströmten Modellkörper.

Wenn der Koordinatenanfang $x = 0$ sich in der Mitte der Rohrlänge l befindet, so gilt für die Rohrwandtemperatur

$$u_w(x) = T_w(x) = u_a + \frac{Q_w - Q_k}{4\pi^2 \lambda_0} \frac{1}{\left(x^2 + \frac{l^2}{4}\right)^2 + \left(\frac{p-l}{2}\right)^2}$$

$$|x| \leq \frac{l}{2}$$

Wird der Koordinatenanfang dagegen an den Rohreingang verlegt, so ergibt sich der folgende Ausdruck,

$$T_w(x) = u_a + \frac{Q_w - Q_k}{4\pi^2 \lambda_0} \frac{1}{\left(\frac{l}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{l^2}{4} - \frac{l}{2}x + x^2 + \left(\frac{p-l}{2}\right)^2\right)}$$

$$0 \leq x \leq l$$

Es kann angenommen werden, daß das stationäre Feld der Über-
temperatur an den Rohrenden $x = 0$ und $x = l$ praktisch ver-
schwindet, so daß die mit der Temperatur $T_0 = u_a$ einströ-
mende Flüssigkeit an diesen Stellen keinem Temperatursprung
ausgesetzt ist, d.h. also

$$T_0 = T_w(0) = T_w(l) = u_a$$

Mit
$$\frac{dT_w}{dx} = \frac{Q_H - Q_K}{4\tilde{\lambda}_G} \frac{\frac{l}{2} - x}{\sqrt{\left(\frac{l}{2} - x\right)^2 + s^2 \left[\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \right]^{1/3}}}$$

folgt für die Konvektionswärme im Rohr mit den Koordinaten
der "Repräsentationsachse" (n, p)

$$\begin{aligned} q_K(n, p) &= \frac{(Q_H - Q_K) \lambda_{FE}}{4 \lambda_G} \int_0^l \frac{\left(\frac{l}{2} - x\right) (l - x) \tilde{N}_u(l - x)}{\sqrt{\left(\frac{l}{2} - x\right)^2 + s^2 \left[\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \right]^{1/3}}} dx \\ &= \frac{(Q_H - Q_K) \lambda_{FE} R_E}{2 \lambda_G} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^l \frac{\left(\frac{l}{2} - x\right) \left(1 - e^{-\frac{j}{2k_{FE}}(l-x)}\right)}{\sqrt{\left(\frac{l}{2} - x\right)^2 + s^2 \left[\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \right]^{1/3}}} dx \end{aligned}$$

Wegen der Spiegelsymmetrie der Rohrwandtemperatur $T_w(x)$ über
die Rohrlänge l verschwinden die Integrale mit dem Integran-

den-Zähler $(\frac{l}{2} - x)$. Es bleibt also stehen

$$q_K(x, p) = - \frac{(Q_H - Q_K) \lambda_{F_L} k_i^2 k_e}{2 \lambda_G} \int_{j=1}^{\infty} a_j \frac{\left(\frac{l}{2} - x\right) \cdot e^{-\frac{z}{2 k_i k_e} (l-x)}}{\sqrt{\left(\frac{l}{2} - x\right)^2 + t_{np}^2}} \quad 75^{11}$$

mit
$$S_{np}^2 = \left[\left(u - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(p - \frac{1}{2} \right)^2 \right]$$

Mit der Variablen

$$z = \frac{f_j}{2 k_i k_e} \left(\frac{l}{2} - x \right)$$

läßt sich der Ausdruck für $q_K(n, p)$ in der folgenden Weise schreiben,

$$q_K(n, p) = - \frac{\lambda_{F_L} (Q_H - Q_K)}{4 \lambda_G} \int_{j=1}^{\infty} a_j \frac{e^{-z}}{\sqrt{z^2 + t_{np}^2}} \quad -z$$

mit
$$c = \frac{f_j l}{4 k_i k_e} \quad \text{und} \quad t_{np}^2 = \frac{f_j}{2 k_i k_e} \quad -z$$

Es ist darauf verzichtet worden, die einzelnen Größen z , c , t_{np} mit j zu indizieren, da nach der anschließenden Näherungsberechnung der Integrale die indexabhängige Größe b_j nach einer Größentransformation wieder als b_j erscheint.

Die angenäherte Berechnung des Integrals

$$\int_{-c}^c \frac{z \cdot e^{-z}}{\sqrt{z^2 + t_{np}^2}} dz$$

geht von der Vorstellung eines sehr hohen Wertes der Integrationskonstanten c aus, so daß der Integrand wegen des e -Faktors nur in der Nachbarschaft von $z = -c$ wesentlich von 0 verschieden ist. Dann ist es erlaubt, den anderen Integrandenfaktor durch eine Tangentendarstellung im Punkte $z = -c$ zu ersetzen, wodurch das Integral in geschlossener Form lösbar wird.

Die Tangentendarstellung lautet

$$\frac{z}{\sqrt{z^2 + t_{np}^2}} = A \cdot z + B$$

mit
$$A = \frac{d}{dz} \left[\frac{z}{\sqrt{z^2 + t_{np}^2}} \right]_{z=-c}$$

und
$$B = c \left\{ \left[\frac{d}{dz} \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 + t_{np}^2}} \right) \right]_{z=-c} - \frac{1}{\sqrt{c^2 + t_{np}^2}} \right\}.$$

Die Ausrechnung liefert:

$$A = \frac{t_{np}^2 - 2c^2}{\sqrt{c^2 + t_{np}^2}} \quad B = -\frac{3c^3}{\sqrt{c^2 + t_{np}^2}}.$$

Der Integrand in der Näherungsdarstellung lautet somit

$$\frac{z \cdot e^{-z}}{\sqrt{z^2 + t_{np}^2}} \approx \frac{t_{np}^2 - 2c^2}{\sqrt{c^2 + t_{np}^2}} \cdot z e^{-z} - \frac{3c^3}{\sqrt{c^2 + t_{np}^2}} \cdot e^{-z}.$$

Vor Ausrechnung des in der dargestellten Weise vereinfachten Integrals ist zu zeigen, welche Größenordnung von c zu erwarten ist, womit dann nachträglich der Berechtigungs-

nachweis für die schon erledigte Näherungsdarstellung des Integranden erbracht ist.

Es galt

$$c = \frac{f \cdot l}{4 R_i R_e}$$

Wegen $b_j < b_{j+1}$ ist die untere Grenze von c mit dem Index $j = 1$ gegeben. Die numerischen Werte sind:

$$b_1 = 14,64 \quad l = 45 \text{ cm} \quad 4R_i = 6 \cdot 10^{-1} \text{ cm}$$

$$a = 15 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1} \text{ (Wasser).}$$

Mit einem vom Rotameter z.B. gemessenen Wert der Wasserstromstärke für 100 Rohre,

$$J = 1 \text{ l/h}$$

ergibt sich für die mittlere Geschwindigkeit des Wassers in einem Rohr

$$\bar{v} \approx 0,04 \text{ cm sec}^{-1}$$

Hiermit wird die Péclet-Zahl für alle Stromstärkewerte $J \leq 1 \text{ l/h}$

$$Pe = \frac{2 R_i \bar{v}}{a} \leq P.$$

Der hieraus folgende Wertebereich für die Größe c ,

$$c \geq 138,$$

zeigt, daß für alle Indexwerte $j \geq 1$ sowie alle Stromstärkewerte der angegebenen Art das Näherungsverfahren für die Berechnung der Integrale Gültigkeit besitzt. Bei der anschließenden Integration der Integrale von der Form

$$\int_{-c}^c x e^{-x^2} dx \quad \text{und} \quad \int_{-c}^c e^{-x^2} dx$$

können alle Größen mit e^{-2c} als Faktor vernachlässigt werden. Außerdem wird $1 - c \approx -c$ gesetzt. Das Ergebnis lautet:

$$q_k^{(n,p)} = \frac{(Q_H - Q_K) \lambda_{FL}}{4 \lambda_G} \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j \left(\frac{c \cdot t_{np}^2 - 2c^3}{\sqrt{c^2 + t_{np}^2}^{15}} + \frac{3c^3}{\sqrt{c^2 + t_{np}^2}^{15}} \right)$$

$$= \frac{(Q_H - Q_K) \lambda_{FL}}{4 \lambda_G} \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j \frac{c}{\sqrt{c^2 + t_{np}^2}^{13}}.$$

An dieser Stelle wird die Größe

$$c = \frac{b_j l}{4 R_i R_e}$$

wieder eingesetzt, wodurch man nach einigen Rechenschritten zu dem folgenden Ausdruck geführt wird,

$$q_k^{(n,p)} = \frac{(Q_H - Q_K) \lambda_{FL} l R_i R_e^2 S}{4 \lambda_G} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + S_{np}^2}^{13}}$$

mit der Summe

$$S = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{b_j}.$$

Da die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ konvergiert, ist für S das sicherlich auch der Fall. Wir können uns mit den drei ersten Gliedern begnügen.

Das Ergebnis lautet:

$$\int = 143 \cdot 10^{-4}$$

Die gesamte aus dem Konvektionskörper herausgeführte Wärme ergibt sich durch Aufsummierung über $n = 1-5$ und $p = 1-5$,

$$Q_K = 24 \sum_{n=1}^5 \sum_{p=1}^5 q_K(n, p)$$

Die Summe mit 25 Summanden reduziert sich infolge Gleichheit einiger Glieder auf 14.

Mit

$$\begin{aligned} \sum_{(14)} &= \sum_{n=1}^5 \sum_{p=1}^5 \frac{1}{\sqrt{l^2 + 4s^2 \left((n - \frac{1}{2})^2 + (p - \frac{1}{2})^2 \right)}} \\ &= 1,592 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-3} \end{aligned}$$

($l = 45 \text{ cm}$, $s = 4 \text{ cm}$)

erhält man schließlich

$$Q_K = \frac{96(Q_H - Q_K) \lambda_G l^2 t_0^{-2}}{\lambda_G}$$

Eine einfache Umstellung und Einsetzen der numerischen Werte liefert den Ausdruck für den Quotienten aus konvektiver und elektrischer Wärme pro Zeiteinheit,

$$\frac{Q_K}{Q_H} = \frac{0,332 \cdot 10^{-6} \cdot t_0^2}{\lambda_G + 0,332 \cdot 10^{-6} \cdot t_0^2}$$

Mit z.B. $Pe = 8$ und $\lambda_G = \lambda_{\text{Sand}} = 8,2 \cdot 10^{-4} \text{ cal cm}^{-1} \text{ sec}^{-1} \text{ Grad}^{-1}$ folgt hieraus

$$\left(\frac{Q_K}{Q_H} \right) = 0,026$$

Dieses Ergebnis zeigt, daß die in III.2 angegebene Voraussetzung, durch die im Konvektionsfall die Quellenstärke $Q_H - Q_K$ in Näherung wirksam ist, für kleine Péclet-Zahlen erfüllt ist.

Die Wärmetransportzahlerhöhung wird durch die Formel

$$\Delta \lambda = \lambda - \lambda_g = \lambda_g \frac{\frac{Q_K}{Q_H} \left(1 + \frac{\lambda_g}{2\lambda_i}\right)}{1 - \frac{Q_K}{Q_H} \left(1 + \frac{\lambda_g}{2\lambda_i}\right)}$$

bestimmt. Durch Einführung der mit den Rotametern gemessenen Wasserstromstärke J (l/h), die mit der Péclet-Zahl in der folgenden Weise verbunden ist,

$$Pe = \frac{2R_i \bar{v}}{a} = \frac{1}{180 \cdot a \cdot \bar{v} \cdot R_i} \cdot J,$$

folgt schließlich für kleine J -Werte

$$\frac{Q_K}{Q_H} = \frac{0,205 J^2}{8,25 + 0,205 J^2},$$

und für die Wärmetransportzahlerhöhung im Falle $\lambda_i = \infty$

$$\Delta \lambda = 0,205 \cdot 10^{-4} \cdot J^2$$

Die spezifische Durchflutung ξ ist mit der Stromstärke J wie folgt verbunden,

$$\xi = \frac{10^4}{l_{SG}} \cdot J.$$

Daher kann man für kleine ξ -Werte auch schreiben

$$\Delta \lambda = 43 \cdot 10^{-4} \xi^2,$$

mit $\lambda_i = \infty$ und $SG = 1,59 \text{ g cm}^{-3}$.

Für kleine x - bzw. große Werte der Péclet-Zahl Pe geht die Nusselt-Zahl gegen unendlich,

$$\lim_{x \rightarrow 0} Nu(x) = \infty$$

$$\frac{x}{2R_i} \frac{1}{Pe} \rightarrow 0$$

Nach Untersuchungen von L  v  que (1928), die sich mit Fragen des Wärmeüberganges an laminar umströmten Körpern befassen, gilt für sehr kleine Einlaufkennzahlen

$$\frac{x}{2R_i} \frac{1}{Re} \ll 1$$

die folgende Darstellung der Nusselt-Zahl

$$Nu(x) = 1,077 \sqrt{\frac{2R_i Re}{x}}$$

Wesentliche Voraussetzung für diese approximative Lösung ist die Vorstellung, daß bei sehr kleinen Einlaufkennzahlen das Geschwindigkeitsprofil in Wandnähe linear verläuft. Das wiederum erlaubt die Behandlung des W  rme  bergangsproblems als das eines laminar strömenden Halbraumes.

Für die zulässige Größe der Péclet-Zahl ist die Voraussetzung einer laminaren Strömung bindend, die bekanntlich bei Überschreitung eines bestimmten Wertes der Reynolds-Zahl Re in eine turbulente Strömung umschlägt. Die so festzulegende obere Grenze der mittleren Geschwindigkeit $\bar{v}$ bzw. der Rotameter-Stromstärke J ergibt sich aus der Laminar-Bedingung

$$Re = \frac{\rho_{FL} R_i \bar{v}}{\eta_{FL}} \leq 1200.$$

Mit den ungefähren Werten

$$\rho_{FL} = 1 \text{ g cm}^{-3} \quad \text{und} \quad \eta_{FL} = 10^{-2} \text{ Poise}$$

folgt

$$\bar{v} \leq 80 \text{ cm sec}^{-1} \quad \text{bzw.} \quad J = 100 R_i^2 \bar{v} \leq 2000 \text{ l/h.}$$

Diese Stromstärke kann in der Anlage nicht überschritten

bzw. nicht erreicht werden.

Setzt man im Ausdruck für die Konvektionswärme des Rohres mit den Koordinaten (n, p)

$$q_K(n, p) = \frac{(Q_H - Q_K) \lambda_{FL}}{4 \lambda_G} \int_0^l \frac{(\frac{l}{2} - x)(l - x) \bar{N}_u(l-x)}{\left[\left(\frac{l}{2} - x \right)^2 + s \left[\left(x - \frac{l}{2} \right)^2 + \left(p - \frac{1}{2} \right)^2 \right] \right]^{1/3}} dx$$

die mittlere Nusselt-Zahl ein,

$$\bar{N}_u(l-x) = \frac{1}{l-x} \int_0^{l-x} N_u(x) dx = 1,616 \sqrt[3]{2 R_0 P_0} \frac{1}{\sqrt[3]{l-x}},$$

so erhält man

$$q_K(n, p) = \frac{9,404 \cdot \lambda_{FL} (Q_H - Q_K)}{\lambda_G} \frac{1}{\sqrt[3]{2 R_0 P_0}} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{x \sqrt[3]{x^2 + \frac{l^2}{4}}}{\sqrt{x^2 + s_{np}}} dx$$

mit $x = \frac{l}{2} - x$

Eine Näherungslösung für dieses Integral kann gegeben werden, wenn man den Wurzelfaktor im Zähler des Integranden durch eine lineare Beziehung ersetzt. Dies geschieht, indem der Anfangspunkt ($z = -1/2$) mit dem Endpunkt ($z = 1/2$) durch eine Gerade verbunden wird. Man erhält auf diese Weise

$$\sqrt[3]{x^2 + \frac{l^2}{4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{l}} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{l}.$$

Der zweite Summand liefert keinen Beitrag zum Integral. Mit dem ersten erhält man

$$q_K(n,p) = \frac{0,404 \lambda_{FL} (Q_H - Q_K)}{\lambda_G} \sqrt[3]{\frac{2 \bar{R}_i}{l}} \sqrt[3]{Pe}.$$

$$\left\{ -2 \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4}{l^2} S_{np}^2}} + \ln \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4}{l^2} S_{np}^2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4}{l^2} S_{np}^2}}} \right\}.$$

Wegen $\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \right),$

folgt weiter

$$q_K(n,p) = \frac{0,404 \lambda_{FL} (Q_H - Q_K)}{\lambda_G} \sqrt[3]{\frac{2 \bar{R}_i}{l}} \sqrt[3]{Pe}.$$

$$\left\{ \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4}{l^2} S_{np}^2}^3} + \frac{1}{5} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4}{l^2} S_{np}^2}^5} + \frac{1}{7} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4}{l^2} S_{np}^2}^7} + \dots \right\}.$$

Bei der weiteren Darstellung werden nur die drei ersten Glieder berücksichtigt.

Die gesamte Konvektionswärme ergibt sich wieder nach der Formel

$$Q_K = 24 \sum_{n=1}^5 \sum_{p=1}^5 q_K(n,p).$$

Man erhält so

$$Q_K = \frac{9,69 \lambda_E (Q_H - Q_K)}{\lambda_G} \sum (42) \sqrt[3]{\frac{\lambda_E}{l}} \sqrt[3]{P_E}$$

$\sum (42)$ bedeutet die Summe aus 42 Gliedern, wobei die ursprüngliche Anzahl von 75 wegen Gleichheit einiger Summanden auf 42 reduziert werden kann.

$$\begin{aligned} \sum (42) &= \sum_{n=1}^5 \sum_{p=1}^5 \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4}{l^2} S^2 \left[\left(n - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(p - \frac{1}{2} \right)^2 \right]^3}} \\ &+ \frac{1}{5} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4}{l^2} S^2 \left[\left(n - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(p - \frac{1}{2} \right)^2 \right]^5}} + \frac{1}{7} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4}{l^2} S^2 \left[\left(n - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(p - \frac{1}{2} \right)^2 \right]^7}} \end{aligned}$$

Die Ausrechnung liefert

$$\sum (42) = 8,129$$

Damit erhält man für den Quotienten aus Konvektions- und elektrisch erzeugter Wärme den Ausdruck

$$\frac{Q_K}{Q_H} = \frac{222,46 \sqrt[3]{P_E}}{8,25 + 222,46 \sqrt[3]{P_E}}$$

Wegen $Pe > 1$ ist

$$\frac{Q_K}{Q_H} \approx 1$$

Dieses Ergebnis zeigt, daß die in III.2 angegebene Voraussetzung, nämlich wirksame Quellenstärke $Q_H - Q_K$ und ein Temperaturabfall im Geweberaum, der umgekehrt proportional

zum Abstand vom Sondenmittelpunkt verläuft, für große Péclet-Zahlen nur in grober Näherung als gegeben angesehen werden kann.

im Falle $\lambda_i = \infty$ wird der Ausdruck für die Wärmetransportzahlerhöhung

$$\Delta\lambda = 222,46 \cdot 10^{-4} \sqrt[3]{Pe} \quad \text{bzw.}$$

$$\Delta\lambda = 442,36 \cdot 10^{-4} \sqrt[3]{J} \quad [J] = \text{cm}^{-1}.$$

Wenn zwischen den hieraus zu gewinnenden und den experimentellen $\Delta\lambda$ -Werten auch keine Übereinstimmung zu erwarten ist, so zeigt die Darstellung doch an, daß bei steigenden Pe- bzw. J-Werten die $(\Delta\lambda - J)$ -Funktion nach einem konkaven Beginn ($\Delta\lambda \sim J^2$) in einen konvexen ($\Delta\lambda \sim \sqrt[3]{J}$) übergehen muß.

IV. Vorbereitende Messungen

1. Messungen am Wasserkreislauf

a. Schlauchkontrollen

Es wird geprüft, in welchem Maße die Durchflüsse der einzelnen Schlauchleitungen übereinstimmen. Dazu werden pro Reduziergefäß 10 Schlauchleitungen in gleicher Weise unterbrochen und ihre Stromstärken gemessen.

Rotametermethode: die Messung wird mit einem sehr empfindlichen Rotameter vorgenommen, das nacheinander in jede unterbrochene Leitung eingeschaltet wird. Die gemessenen Werte entsprechen selbstverständlich nicht denen des freien Flusses, da der Druckverlust im Rotameter die Stromstärke beeinflusst. Es kommt bei den Schlauchkontrollen lediglich auf die Unterschiedlichkeit der einzelnen Durchflüsse an. Die maximale Abweichung der Stromstärke bezogen auf den Mittelwert ergab sich bei den 10 Leitungen eines Reduziergefäßes zu

$$\frac{i_{\max} - i_{\min}}{\frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} i_j} = 12\%$$

Die Werte der übrigen Reduziergefäße unterschieden sich nicht wesentlich hiervon. Bei der Auswahl der 10 Leitungen je Reduziergefäß, die unterbrochen und deren Stromstärken gemessen wurden, ging man so vor, daß alle Quadranten (25 Leitungen) senkrecht zu einer Koordinatenrichtung gleichmäßig beteiligt waren. Da außerdem die Inhomogenität der Wasserdurchflüsse in allen sechs Koordinatenrichtungen (+x, +y, +z) in der gleichen Weise vorliegt, wird die quasi-kugelförmige Symmetrie des Temperaturfeldes hierdurch nicht wesentlich beeinflusst. Aus den gleichen Gründen kann auch der eingestellte und vom Rotameter gemessene Wert (100 Schlauchleitungen) als der im Mittel konvektiv wirksame

Wasserfluß angesehen werden.

Die Annahme, daß die Fehlerbreite auf Algenansammlungen in den Schläuchen zurückzuführen sei, erwies sich als unrichtig. Algen waren im allgemeinen nach einwöchiger Wasserlagerung in den Schläuchen sowie den Plexiglasgefäßen sichtbar. Nach sorgfältiger mechanischer und chemischer Säuberung wurden die Schlauchkontrollen wiederholt. Es ergab sich der gleiche Wert für die relative Extremabweichung der Stromstärke. Trotz dieses übereinstimmenden Ergebnisses, das nur bei geringem Algenbefall zu erwarten war, wurde nach einem Mittel gesucht, um die äußerst aufwendigen Reinigungsarbeiten, die in bestimmten Zeitabständen notwendig wurden, zu vermeiden. Mit einer geringen CuSO_4 -Konzentration war dies schließlich möglich.

Auslaufmethode: bei stationärem freien Fluß aus einer unterbrochenen Leitung läßt man eine Mensur (1000 ml) vollaufen und mißt die Füllzeit t . Umgerechnet auf die Stromstärke $J = 1000/t$ ergibt sich hier eine Maximalabweichung der Stromstärke bezogen auf den Mittelwert von ca. 10 %. Die Stichprobe umfaßte wieder 10 Schläuche eines Reduziergefäßes. Auslaufmessungen an den übrigen Reduziergefäßen unterblieben, da nach dem ersten Verfahren (Rotameter) keine wesentlichen Schwankungen der Maximalabweichungen zu erwarten waren. An jedem Schlauch wurde die Stromstärke mehrmals gemessen; die hierbei auftretenden maximalen Abweichungen betrugen höchstens 2 %. Mit der Auslaufmethode wurde auch die Frage untersucht, ob bei Schlauchleitungen, die den Boden des Vorratsgefäßes peripher verlassen, eine kleinere Stromstärke zu erwarten ist als bei zentral abgehenden. Das Ergebnis war, daß sowohl die Mittelwerte als auch die relativen Extremabweichungen der Stromstärke sich nicht von denen unterschieden, die bei zentral abgehenden Schlauchleitungen beobachtet wurden.

Es ist naheliegend, daß die ermittelten Werte der relativen Extremabweichungen (12 %, 10 %) Folge von Durchmesser-

schwankungen sind. Insgesamt wurden ca. 2000 m Schlauchleitungen aus PVC im Modell verlegt. Es war leider nicht möglich, diese Materialmenge in einer Lieferung vom Hersteller zu beziehen, so daß zu einem geringen Teil auch Schläuche einer anderen Charge eingebaut werden mußten. Die Chargenungleichheit war an verschiedenen Farbtönungen des an sich glasklaren PVC-Materials erkennbar. Außerdem war durch Aufstecken der verschiedenen Chargen auf eine gleiche Rohrdimension der Durchmesserunterschied unmittelbar festzustellen. Diese Chargendifferenz kennzeichnete der Hersteller mit einem Toleranzwert des Durchmessers von $\pm 5 \%$.

In der folgenden Darstellung wird untersucht, ob dieser Toleranzwert mit den ermittelten Werten der relativen Extremabweichungen der Stromstärke in Einklang zu bringen ist. Gemessen wird mit der Auslaufmethode. Eine Schlauchleitung vor einem Reduziergefäß wird unterbrochen und nacheinander unter den gleichen geometrischen Bedingungen (gleiche Höhe des Auslaufloches) einmal mit einem Schlauchstück der Länge l und dann mit einem gleichlangen Schlauch einer anderen Charge verlängert. Außerdem wird die Stromstärke ohne Verlängerungsstück gemessen.

Die im Modell eingebaute Schlauchleitung wird als Rohrleitung der Länge l_0 sowie dem Halbmesser r_0 angesehen. Wenn die Anschlußlänge l nicht zu klein und die Wassergeschwindigkeit gering ist, können hydrodynamische An- und Auslaufstrecken im Bereich der Durchmesseränderung, wenn Leitungen verschiedener Chargen zusammentreffen, unberücksichtigt bleiben. Unter diesen Voraussetzungen gilt, wenn der Schlauch der Länge l und des Halbmessers r angeschlossen wird,

$$f_0 = \frac{\tilde{r}_0^4 \Delta p}{8 \eta \left(l_0 + l \frac{r_0^4}{r^4} \right)},$$

Δp = Druckdifferenz

η = Viskosität.

Die drei Meßsituationen sind

$$1. \quad r = r_0 \quad l = 0 \quad t_0 = 162 \text{ sec} \quad V = 1000 \text{ ml}$$

$$j_0 = \frac{\tilde{x} r_0^4 \Delta p}{8 \eta l_0} = \frac{V}{t_0}$$

$$2. \quad r = r_0 \quad l = l \quad t_1 = 188 \text{ sec} \quad V = 1000 \text{ ml}$$

$$j_1 = \frac{\tilde{x} r_0^4 \Delta p}{8 \eta (l_0 + l)} = \frac{V}{t_1}$$

$$3. \quad r = r_0 + 4r \quad l = l \quad t_2 = 180 \text{ sec} \quad V = 1000 \text{ ml}$$

$$j_2 = \frac{\tilde{x} r_0^4 \Delta p}{8 \eta (l_0 + l \frac{r_0^4}{r^4})} = \frac{V}{t_2}$$

Nach einfacher Rechnung folgt für die relative Durchmesserabweichung der anderen Charge

$$\frac{r - r_0}{r_0} = \frac{\Delta r}{r_0} = \sqrt{\frac{t_2 - t_0}{t_2 - t_0}} - 1 = 9,6\%$$

Dieser Wert ist noch mit der Toleranzangabe des Herstellers in Übereinstimmung. Würde man annehmen, daß eine Schlauchleitung auf der gesamten Länge vom Boden des Vorratsgefäßes bis zum Reduziergefäß mit dieser Durchmesserabweichung vorläge, so wären relative Stromstärkeabweichungen bei den Schlauchkontrollen von

$$4. \quad \frac{\Delta r}{r} = 38,4\%$$

möglich. Daß dies nicht zutrifft, ist ein möglicher Hinweis dafür, daß auch innerhalb einer Schlauchcharge Durchmesseränderungen auftreten, die im Endeffekt kleinere Maximalabweichungen der Stromstärke bedingen, als bei alleiniger Berücksichtigung des Toleranzwertes erwartet werden müßte.

b. Temperaturverteilungen

Für die Bestimmung eines Wertes der Wärmetransportzahlerhöhung bzw. der unmittelbar durch Messung ermittelten stationären Temperaturdifferenz bei verändertem Wasserfluß sind Meßzeiten von 45 min und mehr erforderlich. Für die Gewinnung einer (λ - J)-Kurve ist im allgemeinen ein ganzer Tag anzusetzen. Aus diesem Grunde kommt der Frage nach den instationären Temperaturbewegungen besondere Bedeutung zu.

Aber auch die Art der stationären Temperaturverteilung muß beachtet werden, da die Temperaturen der in den Konvektionskörper eintretenden Wasserflüsse und damit die Höhe der konvektiv abgeführten Wärme hiervon abhängen. Vor Beginn einer Messung konnten im stehenden Wasser des Kreislaufmodells Temperaturdifferenzen von ca. 2°C beobachtet werden. Die isothermen Flächen verliefen horizontal, und, begünstigt durch einen Steinfußboden, war der Temperaturgradient stets nach oben gerichtet. Die Möglichkeit, mit einer hohen Vorzirkulation eine räumliche Isothermie zu erzielen, war nicht gegeben, da die hierzu notwendigen Stromstärken nicht erreicht werden konnten. Bei dem großen Wasservolumen (300 Liter) und den kleinen Stromstärken ist die Kreislaufzeit eines Wasserquants nämlich so groß, daß eine thermisch wirksame Durchmischung nicht stattfand und eine wesentliche Veränderung des stationären Temperaturfeldes nicht zu erkennen war. Wichtig ist, daß die horizontale Isothermie auch bei Wasserfluß erhalten blieb, was für eine konstante Eintrittstemperatur aller Wasserströme in den Konvektionskubus Voraussetzung ist.

Bei passend eingestellter Raumtemperatur bereitete es keine zusätzlichen Mühen, über eine Meßzeit von zwölf Stunden und darüber das Temperaturfeld im Kreislaufmodell konstant zu halten. Dies wurde mit Thermistorsonden im Kühl-, Misch- und Vorratsgefäß kontrolliert. Während der Meßzeit trat lediglich eine geringe Temperaturverschiebung (ca. $0,5^{\circ}\text{C}$)

aller Isothermen auf, von der man annehmen darf, daß sie auf das Meßergebnis bzw. den (λ -J)-Kurvenverlauf einen vernachlässigbaren Einfluß hatte.

Bei den niedrigen Wasserflüssen im Konvektionskörper war die konvektiv abgeführte Wärme so gering, daß die Temperatur im Mischgefäß so gut wie unverändert blieb und der Kühler im nachgeschalteten Kühlgefäß nicht in Funktion zu treten brauchte. Aber auch bei hohen Stromstärken erwies sich die Vorsichtsmaßnahme eines Wärmeentzuges durch den Kühler als überflüssig. Wenn im Mischgefäß auch kleine Temperaturerhöhungen auftraten, so war doch der Wärmeaustausch auf dem langen Wege bis zum Vorratsgefäß groß genug, um hier eine unveränderte Wassertemperatur zu halten. Eine zusätzliche und sehr wichtige Maßnahme zur Temperaturstabilisierung ist darin zu sehen, daß dauernd ein Teil des Wassers in den Vorratsgefäßen über die Überlaufleitungen in das Misch- und Kühlgefäß abfloß, wodurch außerdem die Konstanz des hydrostatischen Druckgefälles gesichert war.

2. Messungen des Temperaturprofils im geheizten Sondenkörper.

Das Temperaturfeld im Innern einer Kugel, die gleichmäßig mit Wärmequellen konstanter Ergiebigkeit belegt ist und sich in einem homogenen Medium unendlicher Ausdehnung befindet, hat die Form eines Rotationsparaboloids. Die Differenz zwischen Zentral- und Randtemperatur fällt um so höher aus, je kleiner die Wärmeleitfähigkeit λ_i des Sondenmaterials ist. Im Falle $\lambda_i = \infty$ ist ein Temperaturplateau vorhanden, wodurch die Lage des Temperaturfühlers im Sondeninnern unkritisch wird. Durch den kugelschicht-

förmigen Aufbau der Sonde, wobei neben hochleitenden Metallen auch Isoliermaterialien von bedeutend geringerem Leitvermögen (s. III.3) verwendet werden, kann mit diesem Fall jedoch nicht gerechnet werden.

Temperaturprofil und effektive Wärmeleitzahl λ_1 des Sondenmaterials wurden daher in einer einfachen Anordnung untersucht. Versuchsaufbau und Methodik ergeben sich aus der schematischen Darstellung in Abb. 19.

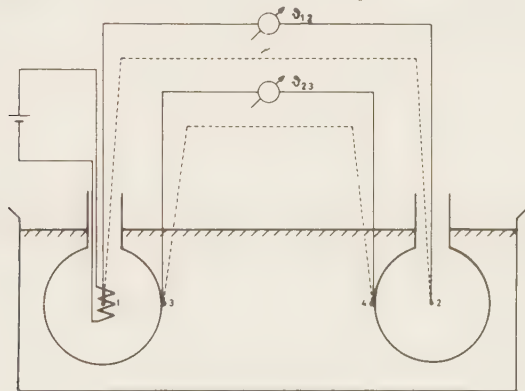


Abb. 19 Schematische Darstellung zur Untersuchung des Temperaturprofils im Sondeninnern. $\vartheta_{34}^L = \vartheta_{23}^L$
 es gilt $\vartheta_{13}^L = \vartheta_{12}^L - \vartheta_{23}^L$
 $\vartheta_{12}^L, \vartheta_{34}^L$ (ϑ_{23}^L) Meßwerte je eines Thermoelementes.

Die Wärmeleitsonde, durch die die Temperaturdifferenz $\vartheta_{34}^L = \vartheta_{23}^L$ zwischen den Oberflächen der großen Sondenkörper gemessen wird, besitzt zylindrische Sondenkörper aus Gold mit einem Durchmesser-Höhen-Verhältnis von 1,2 mm : 3,5 mm. Sie werden mit Leukoplaststreifen an die großen Sondenkugeln geklebt, wodurch ein ausreichend guter Wärmekontakt gewähr-

leistet ist. Wechselnde Placierung der Oberflächensonde war nicht mit einer Änderung der gemessenen Temperaturdifferenz verbunden. Für die im Zentrum des geheizten Sondenkörpers gegen die Basistemperatur gemessene Temperaturdifferenz ϑ_i gilt

$$\vartheta_i = \frac{Q_H}{4\pi r_i \lambda_G} \left(1 + \frac{\lambda_G}{2\lambda_i}\right),$$

wenn die Kugelsonde vom Radius r_i sich in einem unendlich ausgedehnten Medium der Wärmeleitzahl λ_G befindet.

Dagegen gilt, wenn die Temperaturfühler am Rande der Sondenkörper situiert sind,

$$\vartheta_o = \frac{Q_H}{4\pi r_o \lambda_G}.$$

Mit $\vartheta_i = \vartheta_{12}$, $\vartheta_o = \vartheta_{23}$ und $\vartheta_i - \vartheta_o = \vartheta_{13}$ erhält man aus den beiden Temperaturgleichungen einen Ausdruck für die effektive Wärmeleitzahl des Sondenmaterials

$$\lambda_i = \frac{\lambda_G}{2} \frac{\vartheta_{13}}{\vartheta_{12}}.$$

Die nachfolgende Tabelle zeigt bei verschiedenen Heizstromstärken J_H die Temperaturdifferenzwerte, wenn die Sonden in Graphit und in Wasser situiert sind.

Umgebungsmedium

Graphit (Pulver), $\lambda = 4,3 \cdot 10^{-4} \text{ cal cm}^{-1} \text{ sec}^{-1} \text{ Grad}^{-1}$

J_H (mA)	15	25	30
ϑ_{12} (°C)	1,75	4,83	7,04
ϑ_{23} (°C)	0,72	1,93	2,91
ϑ_{13} (°C)	1,03	2,90	4,13

Umgebungsmedium Wasser, $\lambda = 15 \cdot 10^{-4} \text{ cal cm}^{-1} \text{ sec}^{-1} \text{ Grad}^{-1}$

J_H (mA)	15	25	30
ν_{12}^{ℓ} ($^{\circ}\text{C}$)	1,01	2,78	4,08
ν_{23}^{ℓ} ($^{\circ}\text{C}$)	0,06	0,18	0,24
ν_{13}^{ℓ} ($^{\circ}\text{C}$)	0,95	2,60	3,84

Ein erstes Ergebnis, das aus der tabellarischen Zusammenstellung der Meßwerte ersehen werden kann, ist die bis auf Abweichungen von einigen hundertstel Grad genaue Proportionalität der Temperaturdifferenzen mit dem Quadrat der Heizstromstärken.

Mit den Graphit-Werten (15 mA) lautet das numerische Ergebnis für λ_i :

$$\lambda_i = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ cal cm}^{-1} \text{ sec}^{-1} \text{ Grad}^{-1}.$$

Mit den Wasser-Werten (15 mA) erhält man dagegen

$$\lambda_i = 0,42 \cdot 10^{-4} \text{ cal cm}^{-1} \text{ sec}^{-1} \text{ Grad}^{-1}.$$

Der kleinere Wert für λ_i zeigt in diesem Falle die Wirkung der freien Konvektion an, die gleichbedeutend mit einer Erhöhung der effektiven Wärmeleitzahl im Außendmedium ist.

Betrachtet man den in Näherung kugelschichtförmigen Aufbau der Sondenkugel, so erhält man aus den geometrischen und sonstigen Daten

$$\begin{aligned} r_i &= 1 \text{ cm} & r_1 &= 0,5 \text{ cm} & r_H &= 0,25 \text{ cm} \\ \lambda_1 &= 8 \cdot 10^{-4} \text{ cal cm}^{-1} \text{ sec}^{-1} \text{ Grad}^{-1} \end{aligned}$$

nach der Formel

$$\lambda_i = \frac{\lambda_1}{2} \frac{r_H \cdot r_1}{r_1 - r_H}$$

einen λ_i -Wert, $\lambda_i = 2 \cdot 10^{-4} \text{ cal cm}^{-1} \text{ sec}^{-1} \text{ Grad}^{-1}$.

Dieser Wert, der mit dem aus den Graphit-Werten abgeleiteten relativ gut übereinstimmt, kann nur als ein Richtwert angesehen werden, da sowohl r_1 als auch besonders r_H im realen Sondaufbau nur in sehr grober Näherung als konkrete Radiusgrößen aufgefaßt werden können.

Es mag im ersten Augenblick überraschen, daß ein λ_1 -Wert ermittelt wird, der kleiner als die Wärmeleitzahlen der im Sondeninnern befindlichen Materialien ausfällt. Der Grund hierfür liegt darin, daß λ_1 nicht als ein reiner räumlicher Mittelwert zu betrachten ist, sondern in hohem Maße vom geometrischen Aufbau im Sondeninnern abhängt. Die quasischichtförmige Struktur mit der Annahme einer Kugelflächenquelle ohne Raumausdehnung ist für das Ergebnis verantwortlich. Nur wenn die Heizleistung gleichmäßig über das Sondeninnere verteilt wäre, könnte der effektive λ_1 -Wert als ein räumlicher Mittelwert interpretiert werden.

Die hier behandelte Sonde konnte in den Konvektionsversuchen nicht eingesetzt werden, da bei höheren Heizstromstärken (bis 400 mA) im Sondeninnern Temperaturen auftraten, die infolge Isolationsmängel in der Heizspule eine konstante Heizstromeinstellung unmöglich machten.

Es wurde mit einer Sonde S_1 gemessen, deren λ_1 -Wert $95 \cdot 10^{-4} \text{ cal cm}^{-1} \text{ sec}^{-1} \text{ Grad}^{-1}$ betrug. Die Bestimmung erfolgte in der gleichen Weise wie hier beschrieben.

3. Auswahltests für Gewebesimulator

Die besondere Konstruktion des würfelförmigen Konvektionskörpers läßt es wünschenswert erscheinen, als "Gewebestoff" eine Flüssigkeit einzusetzen. Füllung und Entleerung wären dann relativ einfache Operationen. Jedoch ist bei Flüssigkeiten, in denen sich ein erwärmter Körper befindet, mit

freier Konvektion zu rechnen, wodurch auch bei kugelförmiger Wärmequelle eine radialsymmetrische Temperaturverteilung nicht mehr zu erwarten ist.

a. Flüssigkeiten

Kleiner thermischer Ausdehnungskoeffizient und große Viskosität sind Flüssigkeitsdaten, die einer freien Konvektion entgegenstehen. Bei der Auswahl einer passenden Flüssigkeit als auch eines festen Materials als Gewebesimulator ist aber außerdem zu beachten, daß die Wärmeleitzahl des Mediums nicht zu niedrig sein darf.

Im anderen Fall müßte nämlich die Heizleistung der zentralgelegenen Sondenkugel sehr hoch sein, wollte man auch im Bereich der peripher gelegenen Konvektionsrohre eine effektive Temperaturerhöhung und damit einen wesentlichen Wärmeübergang wirksam werden lassen. Die Sondenkonstruktion setzt hier aber eine Grenze, indem bei Heizleistungen von ca. 2 Watt und mehr das Sondeninnere zu warm wird, wodurch infolge von Isolationsmängeln eine zeitkonstante Heizung nicht mehr möglich wird.

Die Untersuchungen der freien Konvektion wurden in einer ca. 30 cm hohen Mensur, die mit der zu testenden Flüssigkeit gefüllt ist, durchgeführt. In der Mitte der Flüssigkeitssäule befindet sich eine kugelförmige Wärmequelle, die elektrisch geheizt wird und an der Oberfläche einen kleinen Thermistor als Temperaturfühler trägt. Außerdem sind je ein Temperaturfühler am Boden und an der Oberfläche der Flüssigkeitssäule situiert, so daß die vertikalen Temperaturgradienten unterhalb und oberhalb der Wärmequelle registriert werden können. Die Abweichung des Quotienten, gebildet aus den stationären Temperaturdifferenzen Mitte - Boden und Mitte - Oberfläche, von 1, kann als qualitatives Maß für die freie Konvektion interpretiert werden. Die Untersuchungen

der freien Konvektion wurden natürlich bei Temperaturen bzw. mit Heizstromstärken durchgeführt, die auch bei den Konvektionsmessungen im Kubus in Frage kommen.

Die folgenden Beobachtungen zeigten sich bei allen Untersuchungen:

1. Die thermisch bedingte Unsymmetrie der Temperaturverteilungen wird sehr schnell erkennbar (wenige Minuten nach Heizbeginn).
2. Die stationären Temperaturen stellen sich sehr spät ein; bei hohen Heizstromstärken (ca. 0,4 A) erst nach Stunden.
3. Die Temperaturdifferenzen Mitte - Oberfläche sind stets kleiner als die zwischen Mitte und Boden der Flüssigkeitssäule gemessenen.

Untersucht wurden neben Wasser, Ricinusöl und Glycerin dreiprozentige wäßrige Lösungen der folgenden hochpolymeren Stoffe: Methylcellulose, Methylhydroxypropyl-Cellulose, Na-Cellulosesulfat, Na-Alginat, Polyäthylenoxidharz sowie verschiedene Siliconöle.

Die drei erstgenannten zeichnen sich durch eine relativ hohe freie Konvektion aus. Diese fällt bei den übrigen Substanzen zwar geringer aus; dafür ergeben sich aber eine Reihe anderer Nachteile, die sie für den Zweck als Gewebesimulator ungeeignet erscheinen lassen. Es zeigt sich nämlich, daß zumindest bei höheren Heizleistungen alle hochpolymeren Stoffe thermisch nicht stabil sind, was sich durch sprunghafte Änderungen der Temperatur bemerkbar macht. Daneben zeichnen sich fast alle Stoffe dieser Art durch eine extrem hohe Haftfähigkeit aus, die im Endeffekt den ursprünglich ins Auge gefaßten Vorteil eines Flüssigkeitseinsatzes als Gewebesimulator ins Gegenteil verkehrt.

Das Resultat aller Untersuchungen mit Flüssigkeiten ist, daß ein Einsatz als "Gewebestoff" nicht angezeigt ist.

b. Feste Stoffe

In einer festen Substanz scheidet die freie Konvektion naturgemäß aus. Hier wurde eine Reihe von Substanzen, die in der engeren Wahl standen, wie Schamotte, Gips, Graphit, Sand und Gelatine (10 %) in einem kleinen Konvektionskubus auf ihre Brauchbarkeit als Gewebeersatz geprüft.

Der Konvektionskubus besteht aus einem oben offenen Plexiglas-kubus von 64 cm^3 Inhalt, der von 4 Plexiglasrohren horizontal durchzogen wird. Der seitliche Abstand der Rohre von der im Zentrum gelegenen Sondenkugel ist für alle gleich wie auch die Richtung der in allen 4 Rohren gleichen Wasserflüsse. Außerhalb des Kastens werden die 4 Wasserflüsse in einer Leitung vereinigt, in der dann mit einem Ventil die Stromstärke eingestellt und mit einem Rotameter gemessen werden konnte.

Bei Sand, der schließlich neben praktischen Erwägungen auch wegen der guten Reproduzierbarkeit der Meßergebnisse (bei wiederholten Materialfüllungen des Kastens) den Vorzug gegenüber den anderen Stoffen erhielt, wurde das folgende Ergebnis erzielt: Bei einer Heizleistung von ca. 2 Watt und Änderungen der Gesamtstromstärke von 0,04 auf 0,05 l/h konnte eine eindeutige Temperaturänderung (etwa $0,1^\circ\text{C}$) noch registriert werden. Relativ lange Meßzeiten (pro Durchflußänderung 60 min) machten eine hohe Temperaturkonstanz der Umgebung erforderlich.

Als Wärmeleitzahl wurde der Wert $\lambda_G = 8,2 \cdot 10^{-4} \text{ cal cm}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ermittelt.

V. Eichung und Messungen

Bei den Wärmeleitsonden S_1 und S_2 , mit denen die nachfolgend beschriebenen Versuche durchgeführt wurden, kann eine innere als auch äußere Mitheizung ausgeschlossen werden. Es gilt also

$$K_2 = 0 \quad \varphi = 0 \quad r_m = \infty.$$

S_1 ist eine Sonde mit zentralgelegenen Temperaturfühler. Bei S_2 dagegen ist der Temperaturfühler in die Kugelperipherie eingegossen. In beiden Fällen kann das Ergebnis der Eichmessung in einem Eichmedium mit der Wärmeleitzahl $\lambda_{G,eich}$, die Größe $K_{1,eich}$, nach der folgenden Formel ermittelt werden,

$$K_{1,eich} = \frac{\lambda_{G,eich}}{\left(\frac{r_s^2}{r_i^2}\right)_{eich}}.$$

Hieraus ergeben sich die Sondenkonstanten für S_1 und S_2 :

$$K_1 = \frac{K_{1,eich}}{1 + \frac{\lambda_{G,eich}}{2\lambda_i}} \quad (5_1)$$

$$K_2 = K_{1,eich} \quad (5_2).$$

Die Sonde mit peripher gelegenen Temperaturfühler ist also durch den Fall $\lambda_i = \infty$ zu beschreiben, auch wenn im Sondeninnern ein Temperaturplateau existiert.

Bei der Eichung treten einige Probleme auf. Zunächst bereitete die Wahl eines geeigneten Eichmedium Schwierigkeiten. Die Wärmeleitzahlen $\lambda_{G,eich}$ und λ_G werden in der

theoretischen Betrachtung als konstante Materialgrößen angesehen. In der Realität verhält sich im allgemeinen die Materie aber so, daß mit steigender Temperatur die Wärmeleitfähigkeit fällt; der Temperaturkoeffizient der Wärmeleitfähigkeit ist also negativ. Bei den hohen Temperaturen in Sondennähe müßte dieser Effekt daher berücksichtigt werden, wenn der Temperaturkoeffizient der Wärmeleitfähigkeit des als Eichmedium gewählten Stoffes entsprechend groß ist.

Viel schwerwiegender als die Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit erweist sich jedoch eine mögliche Strukturänderung des Eichmediums infolge Erwärmung. Diese Komplikation trat bei der häufig als Eichmedium verwendeten 10 %-Gelatine auf. Die hohe Erwärmung in Sondennähe hat ein teilweises Schmelzen der sondenbenachbarten Gelatine zur Folge, wodurch ein Einsatz als Eichmedium nicht in Frage kommt.

Mehrere Versuche mit getrocknetem und sehr feinkörnigem Sand, wobei neben Reproduzierbarkeit auch der Temperaturkoeffizient der Wärmeleitfähigkeit untersucht und als vernachlässigbar gefunden wurde, zeigten befriedigende Ergebnisse. Die Wahl von Sand als Eichmedium ist darüber hinaus auch deshalb sinnvoll, da bei den nachfolgend beschriebenen Konvektionsversuchen Sand als "Gewebestoff" Verwendung findet. Als Wärmeleitfähigkeit des Sandes ist der Wert $\lambda_{G,eich} = \lambda_{Sand} = 8,2 \cdot 10^{-4} \text{ cal cm}^{-1} \text{ sec}^{-1} \text{ Grad}^{-1}$ einzusetzen, der aus Messungen mit kleinräumigen Sonden folgte. Der Temperaturkoeffizient im Bereich von 20 - 45 °C ist vernachlässigbar.

Eine weitere Schwierigkeit war mit der Temperaturabhängigkeit des Heizwiderstandes R_H verbunden. Mehrere Versuchsreihen, bei denen in erster Linie die Konstanz des Heizstromes in Untersuchung stand, führten zu dem Ergebnis, daß die obere Grenze der zulässigen Heizströme bei 100 mA (S_1) bzw. 400 mA (S_2) lagen. Oberhalb dieser Werte traten

im Sondeninnern Isolationsfehler auf, die starke Fluktuationen der Heizstromstärke bedingten. Der Unterschied in den Grenzwerten für die Sonden S_1 und S_2 ist so zu erklären, daß dank des peripher gelegenen Temperaturfühlers bei S_2 der Heizwicklung in der zylindrischen Ausbohrung ein größerer Raum zur Verfügung steht, so daß die Heizenergie-dichte und damit auch die örtlichen Übertemperaturen geringer ausfallen.

Innerhalb des so festgelegten Stromstärkebereiches für die Heizung ändert sich der Heizwiderstand beträchtlich. Bei der Sonde S_1 steigt z.B. der Wert des Widerstandes bei 20°C , der aus 0,4 mm dickem Konstantandraht gewickelt ist, um 15 %, wenn er von 200 mA Heizstrom durchflossen wird. Die Sondenkonstante K_1 muß sich also mit der Übertemperatur im Sondeninnern ändern,

$$K_1 = \frac{0,239 \cdot \hat{K}_H \left(\frac{1}{T} \right)}{4 \hat{r}_i}$$

Es ist daher sinnvoll, für jede Heizstromstärke, mit der ein Konvektionsversuch durchgeführt wurde, einen eigenen $K_{1,\text{eich}}$ - bzw. K_1 -Wert anzugeben. Die dann noch verbleibenden Variabilität, bedingt durch die verschiedenen Übertemperaturen bei den einzelnen Wasserflüssen, kann als vernachlässigbar angesehen werden.

Die Heizstromstärken und Sondenkonstanten K_1 sind:

$$\begin{array}{llll} S_1 : J_H = 75, & 85, & 100 & \text{mA} \\ K_1 = 0.48, & 0.49, & 0.5 & \text{cal cm}^{-1} \text{sec}^{-1} \text{A}^{-2} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} S_2 : J_H = 150, & 200, & 400 & \text{mA} \\ K_1 = 0.5, & 0.55, & 0.6 & \text{cal cm}^{-1} \text{sec}^{-1} \text{A}^{-2} \end{array}$$

Die in IV.3 angeführte Wärmeleitsonde, deren λ_i -Wert wahrscheinlich aufgrund eines extrem hohen Wertes der Größe $r_1 - r_H$ sehr niedrig ausgefallen war, konnte für die

Konvektionsmessungen nicht eingesetzt werden. Die zwangsläufig sehr hohen Innentemperaturen ließen aus bereits erwähnten Gründen eine konstante Heizstromstärke nicht zu.

Die hier eingesetzte Sonde besitzt einen λ_1 -Wert (Messung und Berechnung wie in IV.3) von

$$\lambda_1 = 95 \cdot 10^{-4} \text{ cal cm}^{-1} \text{ sec}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}.$$

Die Messung der Wärmetransportzahlerhöhungen $\Delta\lambda$ beginnt, nachdem eine je nach Höhe der Heizstromstärke verschieden lange Aufheizperiode vergangen ist (ca. 30 - 60 Minuten), bei hohen Werten der Wasserflüsse. Dadurch können mögliche Temperaturgradienten im Konvektionskubus, die nicht von der zentralen Heizung herrühren, ausgeschaltet werden.

Die Wärmetransportzahlerhöhungen $\Delta\lambda$ sind mit Hilfe der folgenden Gleichungen zu bestimmen:

$$\Delta\lambda = \frac{K_1 \frac{J_w^2}{J_i^2} \left(1 + \frac{\lambda_0}{2\lambda_i}\right) - \lambda_0}{1 - \frac{1}{2\lambda_i} K_1 \frac{J_w^2}{J_i^2}} \quad (\text{Sonde } S_1),$$

$$\Delta\lambda = K_1 \frac{J_w^2}{J_i^2} - K_2 \quad (\text{Sonde } S_2).$$

Bei der Registrierung der einzelnen Meßpunkte wurden die Wasserflüsse J schrittweise verringert. Ein Meßpunkt erfordert bis zur Einstellung der stationären Temperaturdifferenz eine Zeit von etwa 45 Minuten. Jede Meßreihe wurde unter den gleichen Bedingungen 5 mal wiederholt, woraus die in den Abbildungen 20 und 21 angegebenen mittleren Fehler resultieren. Die Meßkurven bei den verschiedenen Heizstromstärken differieren nicht wesentlich voneinander, so daß für jede Sonde nur eine Abbildung ange-

geben ist (Abb. 20 und 21).

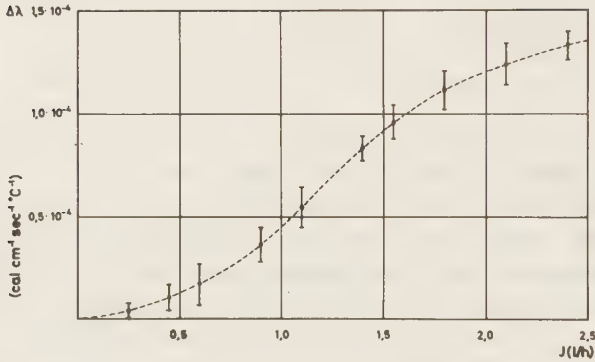


Abb. 20 ($\Delta\lambda$ - J)-Meßkurve, Wärmeleitsonde S_1 , $J_H = 100$ mA.

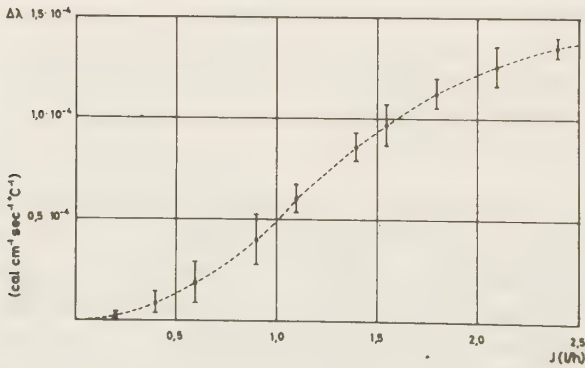


Abb. 21 ($\Delta\lambda$ - J)-Meßkurve, Wärmeleitsonde S_2 , $J_H = 400$ mA.

Bei den Messungen zeigte sich, daß die bei den verschiedenen Wasserflüssen registrierten Temperaturdifferenzen nicht sehr voneinander abwichen. Das kommt auch dadurch zum Ausdruck, daß der in der Theorie für kleine Wasserstromstärken vorausgesagte parabolische Anstieg der $\Delta\lambda$ -Werte ($\Delta\lambda \sim J^2$) schon bei relativ kleinen J-Werten in einen konvexen Kurventeil übergeht.

Die lange Meßzeit und die kleinen Temperaturdifferenzänderungen stellen hohe Anforderungen an die zeitliche Konstanz der Meßparameter, Heizstromstärke, Wasserfluß und Außentemperatur.

Eine wesentliche Übereinstimmung mit der Theorie kann nur aus dem parabolischen Anfangsteil der $(\Delta\lambda - J)$ -Meßkurve abgelesen werden. Bei höheren J-Werten kann die in der Theorie behauptete $\sqrt[3]{J}$ -Abhängigkeit der Wärmetransportzahlerhöhung nur im konvexen Verlauf der $(\Delta\lambda - J)$ -Meßkurve wiedererkannt werden.

VI. Diskussion

Die theoretische Behandlung des Konvektionsproblems liefert das Ergebnis

$$\Delta\lambda = \text{Konst}_1 \cdot J^2$$

$$\text{bzw. } \Delta\lambda = \text{Konst}_2 \cdot \int^2 \quad (\text{Temperaturplateau, } \lambda_i = \infty),$$

das im Experiment auch seine Bestätigung findet. Die Gültigkeit dieser Beziehung ist nur auf kleine Wasserstromstärken J bzw. spezifische Durchflutung $\int$ beschränkt. Das ist in erster Linie eine Folge der Vorstellung, daß auch bei Konvektion für den Temperaturverlauf im Innen- und Außenraum der Kugelsonde die bei reiner Konduktion vorliegende Temperaturlösung, jedoch mit der um die Konvektionswärme Q_K verminderten Quellenergiebigkeit, gültig sein soll.

Für große J -Werte wird man auf die theoretische Lösung geführt,

$$\Delta\lambda = \text{Konst}_3 \cdot \sqrt[3]{J} \quad (\text{Temperaturplateau, } \lambda_i = \infty).$$

Sie erfüllt nicht die Bedingung, mit einem im Geweberaum in Näherung $\frac{1}{r}$ -abhängigen stationären Temperaturfeld gekoppelt zu sein. Daher sind die numerischen Werte dieser Lösung mit den experimentellen nicht vergleichbar. Letztere sind bedeutend kleiner. Nur die Konvexität des $(\Delta\lambda - J)$ -Verlaufes wird sowohl in der theoretischen Lösung als auch im Experiment angezeigt. Es ist also zu sagen, daß in vorliegender Arbeit eine stationäre Lösung des kartesischen Konvektionsproblems im Bereich großer J -Werte (Wasserflüsse) nicht angegeben wird.

Der parabolische Anstieg der $(\Delta\lambda - \int)$ -Kurve im Bereich kleiner Stromstärken steht im Gegensatz zu der theoretischen Lösung, die man erhält, wenn im Außenraum der Kugelsonde Punktsenken in lückenloser Verteilung vorliegen und mit einer Senkenenergiebigkeit, die proportional zur Temperatur-

erhöhung sowie der spezifischen Durchflutung ist, den radialen Wärmestrom beeinflussen.

Die Lösung lautet in diesem Falle

$$4\lambda = \text{Konst} \cdot \sqrt{s}.$$

Eine physiologische Meßsituation, die hierdurch beschrieben wird, liegt vor, wenn eine kugelförmige Wärmeleitsonde in einem Organ implantiert ist, dessen Durchblutung meßbar verändert werden kann. Eine zusätzliche Forderung ist die, daß die Sondenumgebung vorwiegend kapillardurchblutet ist und größere Gefäße nicht vorhanden sind.

Die Wirkung der Punktsenken kann so verstanden werden, daß das in die Kapillaren einfließende Blut erst hier erwärmt wird, indem aufgrund der Temperaturdifferenz Gefäßwand - Blut Wärme in den Kreislauf einfließt und diesen zumindest in der näheren Sondenumgebung nicht verläßt. Die mit dieser Vorstellung verknüpfte Senkenenergiebigkeit ist im einfachsten Falle leicht zu definieren, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

1. Das arterielle Blut wird in den den Kapillaren vorgeschalteten Gefäßen thermisch nicht beeinflusst.
2. Das venöse Blut gibt seine in den Kapillaren aufgenommene Wärme nicht mehr ab.
3. Das Blut erreicht auf der kurzen Kapillarstrecke Wandtemperatur (thermisches Gleichgewicht).

Die Kürze der Kapillaren sowie deren Vielzahl führen dann mit Hilfe einer "Verschmierungsoperation" zu der Vorstellung von im Raum lückenlos verteilter Punktsenken.

Es ist klar, daß, wenn das Blut auf den arteriellen Zufluswegen nicht erwärmt wird, auch bei kleinen Stromstärken infolge des optimalen Temperaturunterschiedes Blut-Wand in den Kapillaren ein hoher Wärmeübergang und damit eine re-

lativ große Transportwirkung gegeben ist. Δl wird also bei wachsender Durchblutung stark ansteigen, entsprechend $\Delta l \sim \sqrt[5]{\xi}$.

Soll dagegen eine arterielle Vorwärmung des Blutes stattfinden, so wird bei kleinen Stromstärken das Blut an allen arteriellen Gefäßstellen mit dem Gewebe im thermischen Quasigleichgewicht stehen; eine alleinige Senkenwirkung im Kapillarbereich ist überhaupt nicht mehr vorhanden. Das erwärmte venöse Blut hat dann anschließend die Möglichkeit, einen Teil der aufgenommenen Wärme wieder an das sondenbenachbarte Gewebe abzugeben. Die Erhöhung der Wärmetransportzahlerhöhung Δl ist daher bei wachsenden ξ -Werten minimal, was durch den parabolischen Anfangsteil der $(\Delta l - \xi)$ -Funktion zum Ausdruck kommt ($\Delta l \sim \xi^2$).

Das kartesische Konvektionsmodell erlaubt auch, mit Hilfe einer geeigneten "Verschmierungsoperation" das stationäre und instationäre Temperaturverhalten mit Hilfe einer Differentialgleichung zu beschreiben. Hier ist aber zu beachten, daß bei alleiniger Betrachtung z.B. der Flüssigkeitsströme in +x- und -x-Richtung, die mit dem Nachbar-gewebe im thermischen Gleichgewicht stehen und über die yz-Ebene "verschmiert" werden, die beiden Konvektionswirkungen sich aufheben. Für die Ströme in y- und z-Richtung gilt natürlich das gleiche. Es spielt bei dieser Annahme also keine Rolle, ob die Flüssigkeit sich bewegt oder nicht; eine Konvektionswirkung wird nicht beobachtet.

Man muß vielmehr in Rechnung setzen, daß die beiden Rohre eines Paares, die von der Flüssigkeit im Gegenstrom durchfließen werden, durch ihren gegenseitigen endlichen Abstand und den damit verbundenen Unterschieden in den Wandtemperaturverläufen einen transversalen Wärmestrom entstehen lassen. Erst nach Berücksichtigung des durch das Gegenstromprinzip bestimmten Wärmeübergangs kann in einer "Verschmierungsoperation" auf die Wärmebilanz eines Volumelements und damit auf die Differentialgleichung geschlossen werden. Diese und ihre Lösung sollen hier nicht weiter erörtert werden.

VII. Zusammenfassung

An einem würfelförmigen kartesischen Konvektionsmodell mit äquidistanter Anordnung von 3·100 Rohrpaaren, wobei Wasser die Rohre eines Paares im Gegenstrom durchfließt, werden die stationären Temperaturverhältnisse im Innen- und Außenraum einer zentral gelegenen und elektrisch geheizten Sondenkugel theoretisch und experimentell untersucht.

Die theoretische Behandlung des Konvektionsproblems geht von der Vorstellung aus, daß die elektrische Wärmeleistung der Sondenkugel um die den Kubus verlassende Konvektionswärme vermindert wird, und die konduktive Temperaturlösung als in Näherung gültig angesehen wird. Hierdurch kann natürlich eine Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment nur für kleine Stromstärken erwartet werden.

Der Anschluß an das Experiment erfolgt über die Bestimmungsgleichung, die in dem einfachen Falle eines Temperaturplateaus im Innern der geheizten Sondenkugel ($\lambda_i = \infty$) das folgende Aussehen hat,

$$\lambda(\infty) = \lambda_G \frac{Q_K(T)}{G_H - Q_K(T)} = K_1 \frac{T_H^2}{T_i^2} - \lambda_G$$

(Theorie) (Experiment)

Hierin bedeuten K_1 eine durch Eichung ermittelte Sondenkonstante und T_i die unmittelbar in der geheizten Sondenkugel registrierte Übertemperatur.

VIII. Zusammenstellung der Formelsymbole

Lateinische Zeichen

A, A_i, A_j	Integrationskonstanten
A_1, A_2, A_3, A_4	
a	Temperaturleitzahl
a_1, a_2, a_3, a_j	Koeffizienten der mittleren Nusselt-Zahlen
B, B_i, B_j, B_n	Integrationskonstanten
B_1, B_2, B_3, B_4	
b_1, b_2, b_3, b_j	Koeffizienten der mittleren Nusselt-Zahlen
C_n	Integrationskonstante
c_{Fl}	spezifische Wärme der Flüssigkeit
c	Rechengröße
e	Zahl e
$F(a, \gamma; z)$	konfluente hypergeometrische Funktion
$f(r)$	Temperaturfunktion
J_G	Stromstärke (Gegenspannung)
J_H	elektrische Heizstromstärke
J	Stromstärke in 100 Rohren
j	Stromstärke in 1 Rohr
K_1, K_2	Sondenkonstanten
$K_{1,eich}, K_{2,eich}$	durch Eichmessungen ermittelte Sondenkonstanten (bei Annahme eines Temperaturplateaus in der Sondenkugel)
k	1. Korrektionsfaktor, Verhältnis gemessener Zentraltemperaturdifferenz - Randtemperaturdifferenz (Kugelsonde) 2. Integrationskonstante
l	Kantendimension des Konvektionskörpers
l_0, l_1	Schlauchlängen

m	Abzählparameter der einzelnen Rohre
$Nu, \overline{Nu}$	Nusselt-Zahl, mittlere Nusselt-Zahl
n	Abzählparameter der einzelnen Rohre
Pe	Péclet-Zahl
p	Abzählparameter der einzelnen Rohre
Δp	Druckdifferenz
Q_H	Heizleistung
Q_K	gesamte Konvektionswärme
Q_H^*	Heizleistung des nicht direkt geheizten Sondenkörpers (innere Mitheizung)
q	Heizleistungsdichte
$q_K(x;n,p)$	Konvektionswärme, welche das in x-Richtung verlaufende Rohr mit den Parametern n,p verläßt
$q_K(y;m,p)$	analog
$q_K(z;m,n)$	analog
R_a, R_i	Rohraußen- und -innenradius
Re	Reynolds-Zahl
R_G	elektrischer Widerstand (Gegenspannung)
R_H	elektrischer Heizwiderstand
r	radialer Abstand (Koordinate)
r_i, r_H, r_j	Radien im Sondeninnern
r_M	Abstand des ungeheizten Sondenkörpers (äußere Mitheizung)
$r_o, r, \Delta r$	lichte Schlauchradien, Radiusänderung
S	Rechengröße (Summe)
s	Abstand zweier Repräsentationsachsen
s_{np}	Rechengröße
$T, \Delta T$	Temperatur, Temperatursprung
$T_m(x)$	mittlere Flüssigkeitstemperatur
$T(\varphi, x)$	Flüssigkeitstemperatur
T_w	Rohrwandtemperatur

$T_{W,j}$	Stufen des treppenförmigen Verlaufs der Rohrwandtemperatur
T_o	Starttemperatur, Rohrwandtemperatur
t_{np}	Rechengröße
t_o, t_1, t_2	Meßzeiten
ΔU	Spannungsänderung (elektrisch)
U_G, U_{G1}, U_{G2}	Gegenspannungen
U_{Th}	Thermospannung
U_1, U_2, U	Eingangsspannungen
u	Temperatur des Gewebes
u_a	Basistemperatur
u_i	Temperatur im Sondeninnern
u_i'	Temperatur im Sondeninnern des nicht direkt geheizten Sondenkörpers
$u_W(x;n,p)$	Rohrwandtemperatur des in x-Richtung verlaufenden Rohres mit den Parametern n,p
$u_W(y;m,p)$	analog
$u_W(z;m,n)$	analog
V	Volumen
v	Wasserflußgeschwindigkeit
$\bar{v}$	mittlere Wasserflußgeschwindigkeit
$\bar{v}'_{np}, \bar{v}''_{np}$	mittlere Wasserflußgeschwindigkeiten in den einzelnen Rohren des Kubus. ('') = eine Richtung, (') = Gegenrichtung
$\bar{v}'_{mp}, \bar{v}''_{mp}$	analog
$\bar{v}'_{mn}, \bar{v}''_{mn}$	analog
x	Koordinate
x'	Dimensionslose Zylinderkoordinate
y	Koordinate
z	Koordinate, Funktionsvariable

Griechische Zeichen

α	1. Parameter, 2. Wärmeübergangszahl
$\alpha, \alpha_1, \alpha_2$	Potentiometer-Skalenwerte
β	reziproker Leitungswiderstand
μ	Parameter
η, η_{Fl}	Viskosität, Viskosität der Flüssigkeit
$\Phi(s')$	Lösungsfunktion
λ	Wärmetransportzahl
λ_l	Wärmetransportzahlerhöhung
λ_{Fl}	Wärmeleitfähigkeit der Flüssigkeit
λ_G	Wärmeleitfähigkeit des Gewebes
$\lambda_{G,j}, \lambda_{G,1}, \lambda_{G,2}$	Wärmeleitfähigkeit der Eichkörper
$\lambda_{G,eich}$	
$\lambda_{\cdot}$	effektive Wärmeleitfähigkeit im Sonden- innern (gemittelt)
u_n	Eigenwert
$\tilde{x}$	Kreiszahl
$f_n(s')$	Eigenfunktion
s, s'	radiale Koordinate im Zylinderkoordinaten- system
ρ_{Fl}	Flüssigkeitsdichte
ρ_G	Gewebedichte
ϑ	Temperaturdifferenz, Übertemperatur
ϑ_i	gemessene Temperaturdifferenz
$\vartheta_{i,j}, \vartheta_{i,1}, \vartheta_{i,2}$	gemessene Temperaturdifferenz in einer Eichsituation j
ϑ_j	Temperaturdifferenzen, gebildet aus den Temperaturen des Sondeninnern gegen die Basistemperatur u_a
$\vartheta_{12}, \vartheta_{23}, \vartheta_{34}$	gemessene und berechnete Temperaturdifferen- zen
ξ	spezifische Durchblutung (Durchflutung)

IX. Übersicht der Abbildungen

Abb.	Legende (teilweise gekürzt)
	Geometrische Anordnung der Plexiglasrohre im Innern des Kubus (S. 7)
2	2 Knotenpunkte mit je 3 Rohrpaaren (S. 8)
3	Konvektionsmodell, farbig (S. 10)
4	Wasserkreislauf, schematisch (S. 11)
5	Elektrisches Ersatzschaltbild des Modellkreislaufes (S. 14)
6	Sondentypen (S. 15)
7	Schematisches Schaltbild des Fluvographen (S. 17)
8	Thermistorenbrücke (S. 19)
9	Lineare Abhängigkeit der Thermistortemperatur von den Skalenwerten eines Präzisionspotentiometers, Nullmethode (S. 21)
10	Zur Bestimmung der Eichkonstanten $K_{1,eich}$ bei fehlender innerer und äußerer Mitheizung (S. 29)
11	Stationäre Temperaturfelder einer kugelförmigen Wärmequelle in homogener und isotroper Umgebung, mit und ohne Konvektion (S. 31)
12	Idealisierter Innenaufbau eines kugelförmigen Sondenkörpers mit einer homogenen Kugelflächenquelle vom Radius r_H (S. 34)
13	Stationäres Temperaturfeld im Innern einer idealisierten Kugelsonde vom Radius r_1 (S. 37)
14	Der Konvektionskubus, ohne Sand, farbig (S. 41)
15	Abzählschema des in x-Richtung verlaufenden Rohres (S. 42)

Abb. Legende (teilweise gekürzt)

- 16 Zum Wärmeübergang in laminarer Rohrströmung,
Wandtemperatur $T_W = \text{const} > T_O$ (S. 47)
- 17 Örtliche und mittlere auf den Temperatursprung
 $T_O - T_W$ bezogene Nusselt-Zahl als Funktion der
Einlaufkennzahl (S. 53)
- 18 Treppenförmiger Verlauf der Wandtemperatur
eines zylindrischen Rohres (S. 54)
- 19 Schematische Darstellung zur Untersuchung
des Temperaturprofils im Sondeninnern (S. 75)
- 20 (4λ-J)-Meßkurve, Wärmeleitsonde S_1 , $J_H = 100\text{mA}$ (S. 86)
- 21 (4λ-J)-Meßkurve, Wärmeleitkurve S_2 , $J_H = 400\text{mA}$ (S. 86)

X. Literatur

- BODNARESCU, M.V.: Beitrag zur Theorie des Wärmeübergangs in laminarer Strömung. VDI-Forschungsheft 450, 19-27 (1955)
- ECKERT, R.G.: Einführung in den Wärme- und Stoffaustausch. Springer-Verlag Berlin/Heidelberg/New York 1966
- HAHN, H.: Thermistoren, ihre Anwendungen und Eigenschaften. R.v.Decker's Verlag, G.Schenck Hamburg/Berlin 1965
- GOLENHOFEN, K., H.HENSEL u. G.HILDEBRANDT: Durchblutungsmessung mit Wärmeleitelementen. Stuttgart, Georg Thieme Verlag 1963
- GRÖBER, H., S.ERK u. U.GRIGULL: Die Grundgesetze der Wärmeübertragung. Springer-Verlag Berlin/Göttingen/Heidelberg 1955
- HENSEL, H. u. L.PRIEBE: Fluvographie, thermische Durchblutungsmessung. Acta Medico Technica 18, 74-78 (1970)
- LEVEQUE, M.A.: Les lois de la transmission de la chaleur par convection. Ann. Mines 13, 201, 305 u. 381 (1928)
- PRIEBE, L. u. E.BETZ: Wärmetransport in homogen und isotrop durchblutetem Gewebe. Ärztl. Forschung 23, 18-30 (1969)

Lebenslauf

Am 24.1.1942 wurde ich in Paulisch, Kreis Königsberg (CSSR), als Sohn des Landwirts Viktor Oberfranz und seiner Ehefrau Helene geboren. Im Zuge der Kriegssereignisse mußte unsere Familie 1944 flüchten; die Aussiedlung erfolgte 1946 nach Tafertshofen in Bayern. Dort trat ich 1948 in die Volksschule ein. Zwei Jahre darauf verstarb meine Mutter. 1951 siedelten wir nach Frankenthal (Pfalz) um, wo ich von 1953 bis 1962 den neusprachlichen Zweig des Staatlichen Gymnasiums besuchte. Das Abitur legte ich am 8.3.62 ab. Von 1962 bis 1964 absolvierte ich meinen Grundwehrdienst in einer Flugsicherungseinheit. Anschließend begann ich in Mannheim Wirtschaftswissenschaften zu studieren. Von 1965 bis 1971 studierte ich Medizin in Marburg; am 10.12.71 bestand ich das medizinische Staatsexamen. Anschließend war ich als Medizinalassistent in der chirurgischen Abteilung des Kreiskrankenhauses Alsfeld tätig.

Meine akademischen Lehrer waren die Damen und Herren, die Professoren und Dozenten:

Amon, Arndt, Beckmann, Berendes, Betz, Bommer, Braasch, Brück, Buchholz, Daume, Dimroth, Dittrich, Dölle, Enghardt, Friederich, Golenhofen, Graul, Hamelmann, Hardewig, Hensel, Henssen, Heuser, Hildebrandt, Hort, Jacob, Kamke, Karlson, Koransky, Korb, Kreutz, Kühnel, Linneweh, Lübbers, Mann, Martini, Meyer-Bertenrath, Petry, Pots, Priebe, Rodeck, Rodenhäuser, Rohen, Schiff, Schleyer, Schmid, Schmitz-Moor-mann, Seidel (sen. et jun.), Straub, Strohmeyer, von Stosch, Walcher, Wendt, Willenbockel, Zilliken

Ich danke Herrn Prof. Dr.med. H. Hensel, der mir Gelegenheit gab, im Physiologischen Institut zu arbeiten, sowie Herrn Doz. Dr.rer.nat. L. Priebe für Anregung und vielseitigen, herzlichen Rat. Den übrigen Mitarbeitern des Instituts, insbesondere Frau Behrens, den Herren Zaun, Fey und Kummer, bin ich verpflichtet, da sie mit Akribie für die technischen Dinge Sorge getragen haben.

Mein Dank gilt ferner allen, die mir das Medizinstudium ermöglicht haben, nicht zuletzt meiner Familie.

